Cálculo

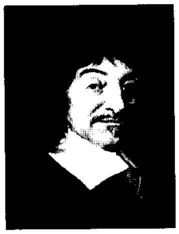
NOVENA EDICIÓN

PEARSON
Prentice Hall ®

Purcell Varberg Rigdon

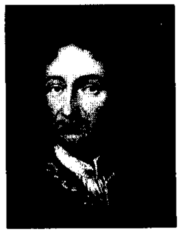
1600 **1700**

Descartes



Newton

Leibniz



Euler

J. Kepler (1571-1630)
R. Descartes (1596-1650)
B. Pascal (1623-1662)
I. Newton (1642-1727)
G. Leibniz (1646-1716)
L'Hôpital (1661-1704)
J. Bernoulli (1667-1748)
L. Euler (1707-1783)
M. Agnesi (1718-1799)

Kepler

Pascal

L'Hôpital

Bernoulli

Contribuidores del Cálculo

[El cálculo es] el resultado de una dramática lucha intelectual que ha durado los últimos veinticinco siglos.

—*Richard Courant*

1609 Leyes de Kepler del movimiento planetario

1637 Geometría analítica de Descartes

1665 Newton descubre el cálculo

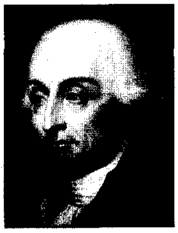
1696 Primer texto de cálculo (L'Hôpital)

1728 Euler introduce e

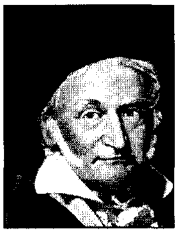
1800 **1900**

Otros contribuidores
Pierre de Fermat (1601-1665)
Michel Rolle (1652-1719)
Brook Taylor (1685-1731)
Colin Maclaurin (1698-1746)
Thomas Simpson (1710-1761)
Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)
George Green (1793-1841)
George Gabriel Stokes (1819-1903)

Lagrange

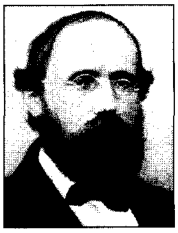


Gauss



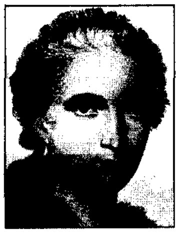
Cauchy

Riemann



Lebesgue

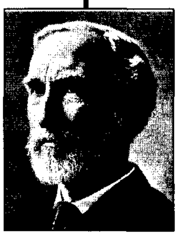
J. Lagrange (1736-1813)
C. Gauss (1777-1855)
A. Cauchy (1789-1857)
K. Weierstrass (1815-1897)
G. Riemann (1826-1866)
J. Gibbs (1839-1903)
S. Kovalevsky (1850-1891)
H. Lebesgue (1875-1941)



Agnesi

Weierstrass

Kovalevsky



Gibbs

1756 Lagrange inicia su *Mécanique analytique*

1799 Gauss demuestra el teorema fundamental del álgebra

1821 Noción precisa de límite (Cauchy)

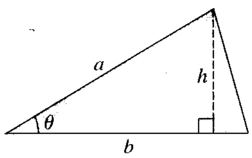
1854 Integral de Riemann

1873 e es trascendental (Hermite)

1902 Integral de Lebesgue

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

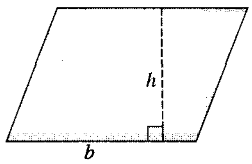
Triángulo



$$\text{Área} = \frac{1}{2} bh$$

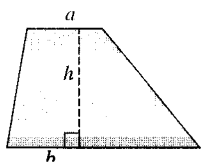
$$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta$$

Paralelogramo



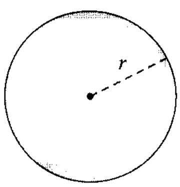
$$\text{Área} = bh$$

Trapecio



$$\text{Área} = \frac{a+b}{2} h$$

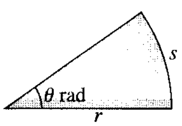
Círculo



$$\text{Circunferencia} = 2\pi r$$

$$\text{Área} = 2\pi r$$

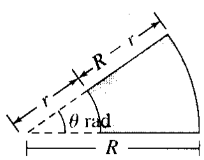
Sector circular



$$\text{Longitud de arco} = r\theta$$

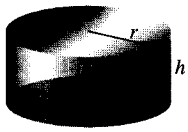
$$\text{Área} = \frac{1}{2} r^2\theta$$

Rectángulo polar



$$\text{Área} = \frac{R+r}{2}(R-r)\theta$$

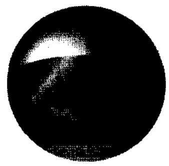
Cilindro circular recto



$$\text{Área lateral} = 2\pi rh$$

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

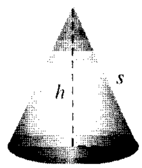
Esfera



$$\text{Área} = 4\pi r^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

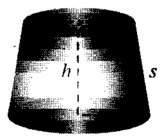
Cono circular recto



$$\text{Área lateral} = \pi rs$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

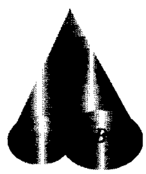
Tronco de un cono circular recto



$$\text{Área lateral} = \pi s(r+R)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h$$

Cono general



$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}(\text{área } B)h$$

Cuña

$$\text{Área } A = (\text{área } B) \sec \theta$$

Cálculo

NOVENA EDICIÓN

Esteban Vázquez Fra

Edwin J. Purcell
University of Arizona

Dale Varberg
Hamline University

Steven E. Rigdon
Southern Illinois University Edwardsville

Traducción:

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac
Escuela Superior de Físico-Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional, México

Revisión técnica:

Linda Margarita Medina Herrera
Natella Antonyan
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

Santos Prado Medina
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Profesional Zacatenco
Instituto Politécnico Nacional, México

Antonio Merchan Abril
Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, Colombia

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

PURCELL, EDWIN J.; VARBERG, DALE; RIGDON, STEVEN E.

Cálculo

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2007

ISBN: 978-970-26-0919-3
Área: Universitarios

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 872

Edición en español
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Claudia Celia Martínez Amigón
Supervisor de producción: Rodrigo Romero Villalobos

Edición en inglés
Acquisitions Editor: *Adam Jaworski*
Editor-in-Chief: *Sally Yagan*
Project Manager: *Dawn Murrin*
Production Editor: *Debbie Ryan*
Assistant Managing Editor: *Bayani Mendoza de Leon*
Senior Managing Editor: *Linda Mihato Behrens*
Executive Managing Editor: *Kathleen Schiaparelli*
Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Director of Marketing: *Patrice Jones*
Executive Marketing Manager: *Halee Dinsey*
Marketing Assistant: *Joon Won Moon*
Development Editor: *Frank Purcell*
Editor-in-Chief, Development: *Carol Trueheart*
Art Director: *Heather Scott*
Interior Designer: *Judith Matz-Coniglio*
Cover Designer: *Tamara Newnam*
Art Editor: *Thomas Benfatti*
Creative Director: *Juan R. López*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Manager, Cover Visual Research & Permissions: *Karen Sanatar*
Director, Image Resource Center: *Melinda Reo*
Manager, Rights and Permissions: *Zina Arabia*
Manager, Visual Research: *Beth Brenzel*
Image Permission: *Vickie Menanteaux*
Cover Photo: *Massimo Listri/Corbis; Interior iew of Burj Al Arab Hotel, Dubai, United Arab Emirates*

NOVENA EDICIÓN, 2007

D.R. © 2007 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5to. piso
Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

PEARSON Educación®

ISBN 10: 970-26-0919-4
ISBN 13: 978-970-26-0919-3

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 10 09 08 07

A

Pat, Chris, Mary y Emily

Agradecimientos

Agradecemos a todos los profesores que han sido usuarios leales y han impartido la materia de Cálculo en los países de habla hispana con el apoyo del reconocido libro de Purcell. Sus valiosos comentarios han servido para enriquecer el desarrollo de la actual edición. Esperamos que con el uso de este texto cumplan satisfactoriamente los objetivos del programa del curso y preparen a sus alumnos para enfrentar los retos actuales dentro del ámbito de las matemáticas. En especial deseamos agradecer el apoyo y retroalimentación que nos han dado los siguientes profesores:

MÉXICO
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional Autónoma de México
Gustavo Rocha Belhan
Carlos Crail Corzas
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores Monterrey, campus Chihuahua
Carlos Manzanera Quintana
Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez
José Jiménez Jiménez
Instituto Tecnológico de Chihuahua
Rubén Prócoro Hernádez Rivera
Velia Pérez González

COLOMBIA
Universidad de los Andes, Bogotá
Raquel Rodríguez
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga
Luis Carlos Oñate
Universidad Autónoma de Bucaramanga
Nohora Nájera
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá
Francisco Soler
Universidad Javeriana, Bogotá
Eddy Herrera
Héctor Linares
Universidad Piloto de Colombia, Bogotá
Carlos Garzón
Universidad Distrital, Bogotá
Zulima Ortiz
Universidad de Antioquia, Medellín
José Luis Pérez
Jesús Del Valle
Walter Díaz

PERÚ
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Manuel Álvarez Blanco
Agustín Curo Cubas
José Cuevas González
Eduardo Fernandini Capurro
Alberto Mejía Manrique
Pontificia Universidad Católica del Perú
Miguel Ángel Gonzaga Ramírez
Universidad de Lima
César Vialardi Sacín

VENEZUELA
Universidad Simón Bolívar (USB)
María Rosa Brito
Sabrina Harbin
Universidad de los Andes (ULA)
María Ferrer
Cecilia de Villegas
Universidad del Tachira (UNET)
Ángela Torres
Omar Suárez
Universidad Rafael Belloso Chapín (URBE)
Yadira Matos
Jasmín Matos

Contenido

Prefacio

De nuevo, la novena edición de *Cálculo* es una revisión modesta. Se han agregado algunos temas y otros se han reacomodado, pero el espíritu del libro ha permanecido sin alteraciones. Los usuarios de las ediciones precedentes nos han informado del éxito que tuvieron y no tenemos la intención de restarle ventajas a un texto bastante viable.

Para muchos, este libro aún será considerado como un texto tradicional. En su mayoría, se demuestran los teoremas, se dejan como ejercicio o se dejan sin demostrar cuando la comprobación es demasiado difícil. Cuando esto último sucede, tratamos de dar una explicación intuitiva para que el resultado sea plausible, antes de pasar al tema siguiente. En algunos casos, damos un bosquejo de una demostración, en cuyo caso explicamos por qué es un bosquejo y no una demostración rigurosa. El objetivo sigue siendo la comprensión de los conceptos de cálculo. Aunque algunos ven al énfasis en la presentación clara y rigurosa como una distracción para la comprensión del cálculo, nosotros vemos que ambas son complementarias. Es más probable que los estudiantes comprendan los conceptos si los términos se definen con nitidez y los teoremas se enuncian y demuestran claramente.

Un texto breve La novena edición continúa siendo la obra más breve de los principales textos de cálculo exitosos. Hemos tratado de no saturar el texto con temas nuevos y enfoques alternativos. En menos de 800 páginas tratamos la mayor parte de los temas de cálculo; entre ellos, un capítulo preliminar y el material de límites a cálculo vectorial. En décadas recientes, los estudiantes han desarrollado malos hábitos. Desean encontrar el ejemplo resuelto de modo que coincida con el problema de su tarea. Nuestro objetivo con este texto continúa manteniendo al cálculo como un curso centrado en determinadas ideas básicas en torno a palabras, fórmulas y gráficas. La resolución de los conjuntos de problemas, crucial para el desarrollo de habilidades matemáticas, no debe eclipsar el objetivo de la comprensión del cálculo.

Problemas de revisión de conceptos Para alentar a los estudiantes a leer y entender el texto, a cada conjunto de problemas le preceden cuatro cuestiones para completar. Éstas prueban el dominio del vocabulario básico, comprensión de los teoremas y la habilidad para aplicar los conceptos en contextos más sencillos. Los estudiantes deben responder estos cuestionamientos antes de pasar a los problemas siguientes. Fomentamos esto para dar una retroalimentación inmediata; las respuestas correctas se proporcionan al final del conjunto de problemas. Estos puntos también hacen algunas preguntas de examen para ver si los estudiantes han hecho la lectura necesaria y están preparados para la clase.

Problemas de repaso e introducción También hemos incluido un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente. Muchos de estos problemas ayudan a los estudiantes a repasar temas anteriores antes de iniciar el nuevo capítulo. Por ejemplo.

- Capítulo 3, Aplicaciones de la derivada: se les pide a los estudiantes resolver desigualdades como las que surgen cuando preguntamos en dónde una función es creciente/decreciente o cóncava hacia arriba/hacia abajo.
- Capítulo 7, Técnicas de integración: se les pide a los estudiantes evaluar varias integrales que incluyen el método de sustitución, la única técnica significativa que han aprendido hasta ese momento. La falta de práctica en la aplicación de esta técnica podría significar un desastre en el capítulo 7.
- Capítulo 13, Integrales múltiples: se les pide a los alumnos hacer bosquejos de gráficas de ecuaciones en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas. La visualización de regiones en los espacios bidimensional y tridimensional es clave en la comprensión de integración múltiple.

Otros problemas de repaso e introducción piden a los estudiantes utilizar lo que ya conocen para obtener una ventaja en el capítulo siguiente. Por ejemplo,

- Capítulo 5, Aplicaciones de la integral: se les pide a los estudiantes determinar la longitud de un segmento de línea entre dos funciones, exactamente la habilidad que se requiere en el capítulo para realizar lo que llamaremos *rebanar, aproximar* e *integrar*. Además, se les pide a los estudiantes determinar el volumen de un disco pequeño, una arandela y un cascarón. Al haber resuelto esto antes de iniciar el capítulo los estudiantes estarán mejor preparados para comprender la idea de *rebanar, aproximar* e *integrar,* y su aplicación para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

- Capítulo 8, Formas indeterminadas e integrales impropias: se les pide a los estudiantes calcular el valor de una integral como $\int_0^a e^{-x}\,dx$, para $a = 1, 2, 4, 8, 16$. Esperamos que los estudiantes resuelvan un problema como éste y se den cuenta de que conforme a crece, el valor de la integral se aproxima a 1; de este modo se establece la idea de integrales impropias. Antes del capítulo, hay problemas similares que incluyen sumas sobre series infinitas.

Sentido numérico El sentido numérico continúa desempeñando un papel importante en el texto. Todos los estudiantes de cálculo cometen errores numéricos al resolver problemas, pero aquellos con sentido numérico reconocen una respuesta absurda y tratan de resolver nuevamente el problema. Para impulsar y desarrollar esta importante habilidad, hemos enfatizado el proceso de estimación. Sugerimos cómo hacer estimaciones mentalmente y cómo llegar a las respuestas numéricas aproximadas. En el texto hemos aumentado el uso de esta característica mediante el símbolo $\boxed{\approx}$, en donde se hace una aproximación numérica. Esperamos que los estudiantes hagan lo mismo, en especial en los problemas con el icono $\boxed{\approx}$.

Uso de tecnología Muchos problemas en la novena edición están marcados con uno de los siguientes símbolos:

$\boxed{\text{C}}$ indica que sería útil una calculadora científica ordinaria.

$\boxed{\text{GC}}$ indica que se requiere una calculadora gráfica.

$\boxed{\text{CAS}}$ indica que se necesita un sistema de álgebra computacional.

Los proyectos de tecnología que estaban al final de los capítulos en la octava edición, ahora están disponibles en la Web en archivos PDF.

Cambios en la novena edición La estructura básica y el espíritu primordial del texto han permanecido sin cambio. A continuación están los cambios más importantes en la novena edición.

- Hay un conjunto de problemas de repaso e introducción entre el final de un capítulo y el inicio del siguiente.
- El capítulo preliminar, ahora denominado capítulo 0, se ha condensado. Los temas de "precálculo" (que en la octava edición estaban al inicio del capítulo 2) se colocaron ahora en el capítulo 0. En la novena edición, el capítulo 1 inicia con límites. Todo lo que se requiera estudiar del capítulo 0 depende de los antecedentes de los estudiantes y variará de una institución educativa a otra.
- Las secciones sobre antiderivadas y una introducción a ecuaciones diferenciales se han cambiado al capítulo 3. Esto permite claridad entre los conceptos de "tasa de cambio" y "acumulación", ya que ahora el capítulo 4 inicia con área, seguida de inmediato con la integral definida y los teoremas fundamentales del cálculo. "La experiencia del autor ha sido que muchos estudiantes de primer año se equivocan al hacer una distinción clara entre los diferentes conceptos de la integral indefinida (o antiderivada) y la integral definida como el límite de una suma". Esto fue en la primera edición, publicada en 1965, y sigue siendo cierto ahora. Esperamos que al separar estos temas se atraerá la mirada a la distinción.

- Probabilidad y presión de fluidos se agregó al capítulo 5, Aplicaciones de la integral. Enfatizamos que los problemas de probabilidad son tratados como problemas de masa a lo largo de una recta. El centro de masa es la integral de x por la densidad, y la esperanza en probabilidad es la integral de x por la densidad (probabilidad).
- El material sobre secciones cónicas se ha resumido de cinco secciones a tres. Los estudiantes han visto mucho (si no es que todo) de este material en sus cursos de precálculo.
- Los vectores se han consolidado en un solo capítulo. En el capítulo 13 de la octava edición se estudiaron vectores en el plano y en el 14, vectores en el espacio. Con este enfoque, repetíamos varios temas en el capítulo 14; por ejemplo, el producto punto y la curvatura. El enfoque en la novena edición trata de estudiar una sola vez los vectores. La mayor parte de la presentación se hace en términos de vectores en el espacio, aunque señalamos cómo funcionan los vectores en el plano. El contexto de un problema debe indicar si son necesarios los vectores en el plano o en el espacio.
- Hay ejemplos y un ejercicio sobre las leyes de Kepler del movimiento planetario. El material sobre vectores termina en la deducción de las leyes de Kepler a partir de la ley de Newton de la gravitación. Deducimos la segunda y tercera leyes de Kepler en los ejemplos, y dejamos como ejercicio la primera ley. En esta práctica, se guía a los estudiantes a través de los pasos, (a) a (l), de la deducción.
- El capítulo 13, Integrales múltiples, ahora finaliza con una sección sobre cambio de variables en integrales múltiples mediante el jacobiano.
- Las secciones sobre métodos numéricos se han colocado en lugares apropiados a lo largo del texto. Por ejemplo, la sección sobre la resolución de ecuaciones de forma numérica se ha convertido en la sección 3.7, la integración numérica es la sección 4.6; las aproximaciones para ecuaciones diferenciales se convirtieron en la sección 6.7, y la aproximación de Taylor para una función ahora es la sección 9.9.
- El capítulo sobre ecuaciones diferenciales se ha eliminado, pero está disponible para los usuarios en la Web. El texto ya tiene muchas secciones sobre ecuaciones diferenciales, incluyendo campos de pendientes y el método de Euler.
- El número de preguntas de conceptos se ha incrementado de manera significativa. Muchos problemas más preguntan al estudiante acerca de gráficas. También hemos aumentado el uso de métodos numéricos, tal como el método de Newton y la integración numérica, en problemas que no pueden tratarse de manera analítica.

Agradecimientos Quisiera agradecer al equipo de Prentice Hall, incluyendo a Adam Jaworski, Eric Franck, Dawn Murrin, Debbie Ryan, Bayani deLeon, Sally Yagan, Halee Dinsey, Patrice Jones, Heather Scott y Thomas Benfatti por su apoyo y paciencia. También deseo agradecer a quienes leyeron el manuscrito cuidadosamente, entre ellos, Frank Purcell, Brad Davis, Pat Daly (compañía Paley) y Edith Baker (Writewith, Inc.). Tengo una gran deuda de gratitud con Kevin Bodden y Christopher Rigdon, quienes trabajaron sin descanso en la preparación de los manuales de soluciones, y con Bárbara Kniepkamp y Brian Rife por la preparación de las respuestas del final del libro. Además, quiero agradecer a los profesores de la Southern Illinois University Edwardsville (y de otros lugares), en especial a George Pelekanos, Rahim Karimpour, Krzysztof Jarosz, Alan Wheeler y Paul Phillips, por sus valiosos comentarios.

También agradezco a los siguientes profesores por su cuidadosa revisión y útiles comentarios durante la preparación de la novena edición.

Fritz Keinert, Iowa State University
Michael Martin, Johnson County Community College
Christopher Johnston, University of Missouri-Columbia
Nakhle Asmar, University of Missouri-Columbia
Zhonghai Ding, University de Nevada Las Vegas
Joel Foisy, SUNY Potsdam
Wolfe Snow, Brooklyn College
Ioana Mihaila, California State Polytechnic University, Pomona
Hasan Celik, California State Polytechnic University

Jeffrey Stopple, University of California, Santa Barbara
Jason Howell, Clemson University
John Goulet, Worcester Polytechnic Institute
Ryan Berndt, The Ohio State University
Douglas Meade, University of South Carolina
Elgin Johnston, Iowa State University
Brian Snyder, Lake Superior State University
Bruce Wenner, University of Missouri-Kansas City
Linda Kilgariff, University of North Carolina en Greensboro
Joel Robbin, University of Wisconsin-Madison
John Johnson, George Fox University
Julie Connolly, Wake Forest University
Chris Peterson, Colorado State University
Blake Thornton, Washington University en Saint Louis
Sue Goodman, University of North Carolina-Chapel Hill
John Santomos, Villanova University

Por último, agradezco a mi esposa Pat y a mis hijos Chris, Mary y Emily por tolerar todas las noches y fines de semana que estuve en la oficina.

S. E. R.
srigdon@siue.edu
Southern Illinois University Edwardsville

RECURSOS PARA LOS PROFESORES (EN INGLÉS)

Distribución de recursos para el profesor

Todos los recursos para el profesor pueden descargarse del sitio Web **www.pearsoneducacion.net/purcell.** Seleccione "Browse our catalog", luego dé clic en "Mathematics", seleccione su curso y elija su texto. En "Resources", en el lado izquierdo, elija "instructor" y el complemento que necesita descargar. Se le pide que realice un registro antes de que pueda completar este proceso.

- ***TestGen***
  Crea con facilidad exámenes a partir de secciones del texto. Las preguntas se generan con un algoritmo que permite versiones ilimitadas. Edite problemas o genere los propios.
- ***Archivo con preguntas de examen***
  Un banco de exámenes obtenidos de TestGen.
- ***Diapositivas en PowerPoint***
  Son diapositivas que se pueden editar por completo y están apegadas al texto. Pueden usarse para proyectos en clase o como un website para un curso en línea.
- ***Manual de soluciones para el profesor***
  Soluciones totalmente desarrolladas de todos los ejercicios del libro y los proyectos del capítulo.
- ***Proyectos de tecnología***
- ***Capítulo 15, Ecuaciones diferenciales***
  El capítulo completo está disponible en PDF para descargarlo.

MathXL®

MathXL® es un poderoso sistema en línea para tareas, tutoriales y asignaciones que acompaña a su libro de texto. Los instructores pueden crear, editar y asignar tareas y exámenes en línea mediante ejercicios generados por medio de un algoritmo y que estén correlacionados al nivel de objetivo para el texto. El trabajo del estudiante es seguido en un registro de avance. Los estudiantes pueden hacer exámenes de capítulo y recibir planes de estudio personalizados con base en sus resultados. El plan de estudio diagnostica las debilidades y vincula a los estudiantes con ejercicios por objetivos que necesitan. Además, los estudiantes pueden tener acceso a videoclips de los ejercicios seleccionados. MathXL® está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio Web en **www.pearsoneducacion.net/purcell**

MyMathLab

MyMathLab es un curso en línea personalizable, de texto específico, para sus libros. MyMathLab está sustentado por el ambiente en línea de enseñanza y aprendizaje CourseCompass™ de Pearson Educación, y por MathXL® nuestro sistema de tareas, tutoriales y evaluación en línea. MyMathLab le proporciona las herramientas necesarias para poner todo o parte de su curso en línea, si sus estudiantes están en un laboratorio o trabajando en casa.

MyMathLab proporciona un conjunto rico y flexible de materiales para el curso, con la característica que los ejercicios de respuesta abierta son generados de manera algorítmica para práctica ilimitada. Los estudiantes pueden utilizar las herramientas en línea, tales como clases en video y un libro de texto en multimedia para mejorar su desempeño. Los instructores pueden utilizar los administradores de tareas y exámenes de MyMathLab para seleccionar y asignar ejercicios en línea relacionados con el libro, y pueden importar exámenes de TestGen para agregar flexibilidad. El único archivo de calificaciones —diseñado específicamente para matemáticas— lleva un registro automático de tareas y resultados de exámenes de los estudiantes y le permite al instructor el cálculo de las evaluaciones finales. MyMathLab está disponible para quienes adopten el libro y estén cualificados. Para mayor información, visite nuestro sitio Web en **www.pearsoneducacion.net/purcell**

CAPÍTULO 0 Preliminares

0.1
Números reales, estimación y lógica

El cálculo está basado en el sistema de los números reales y sus propiedades. Pero, ¿cuáles son los números reales y cuáles son sus propiedades? Para responder, comenzamos con algunos sistemas numéricos más sencillos.

Los enteros y los números racionales Los números más sencillos de todos son los **números naturales,**

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Con ellos podemos *contar* nuestros libros, nuestros amigos y nuestro dinero. Si incluimos a sus negativos y al cero, obtenemos los **enteros**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Cuando *medimos* longitud, peso o voltaje, los enteros son inadecuados. Están separados muy lejos uno del otro para dar suficiente precisión. Esto nos lleva a considerar cocientes (razones) de enteros (véase la figura 1), números tales como

$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2}, \text{ y } \frac{-17}{1}$$

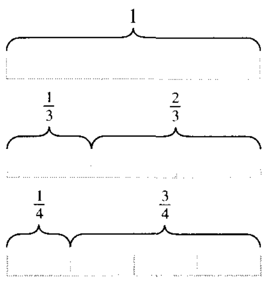


Figura 1

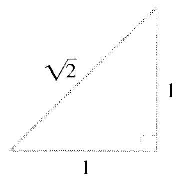


Figura 2

Observe que incluimos $\frac{16}{2}$ y $\frac{-17}{1}$, aunque normalmente los escribiríamos como 8 y -17, ya que son iguales a aquéllos por el significado ordinario de la división. No incluimos $\frac{5}{0}$ o $\frac{-9}{0}$ porque es imposible dar significado a estos símbolos (véase el problema 30). Recuerde siempre que la división entre 0 nunca está permitida. Los números que pueden escribirse en la forma m/n, donde m y n son enteros con $n \neq 0$ son llamados **números racionales**.

¿Los números racionales sirven para medir todas las longitudes? No. Este hecho sorprendente fue descubierto por los antiguos griegos alrededor del siglo V a. C. Ellos demostraron que aunque la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$ (véase la figura 2), $\sqrt{2}$ no puede escribirse como un cociente de dos enteros (véase el problema 77). Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número **irracional** (no racional). Así, también lo son $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, π, y una gran cantidad de números más.

Los números reales Considere todos los números (racionales e irracionales) que pueden medir longitudes, junto con sus negativos y el cero. A éstos les llamamos **números reales**.

Los números reales pueden verse como etiquetas para puntos a lo largo de una recta horizontal. Allí miden la distancia, a la derecha o izquierda (la **distancia dirigida**), de un punto fijo llamado **origen** y marcado con 0 (véase la figura 3). Aunque quizá no

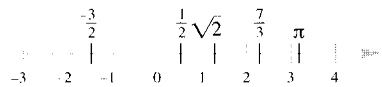


Figura 3

podamos mostrar todas las etiquetas, cada punto tiene un número real único que lo etiqueta. Este número se denomina **coordenada** del punto, y la recta coordenada resultante es llamada **recta real**. La figura 4 sugiere las relaciones entre las series de números analizadas hasta ahora.

Recuerde usted que el sistema de números reales puede ampliarse aún más a los **números complejos**. Éstos son números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En este libro rara vez se utilizarán los números complejos. De hecho, si decimos o sugerimos *número* sin adjetivo calificativo alguno, se puede suponer que queremos decir número real. Los números reales son los personajes principales en cálculo.

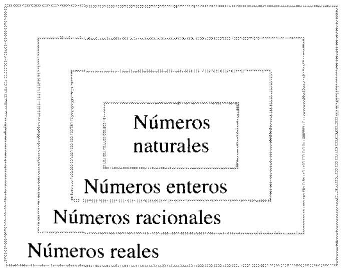


Figura 4

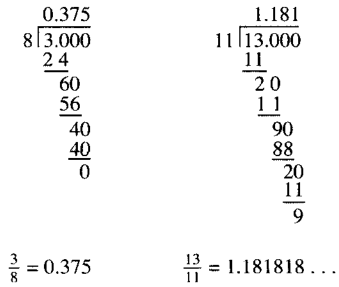


Figura 5

Decimales periódicos y no periódicos

Cualquier número racional puede escribirse como decimal, ya que por definición siempre puede expresarse como el cociente de dos enteros; si dividimos el denominador entre el numerador, obtenemos un decimal (véase la figura 5). Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{3}{8} = 0.375 \qquad \frac{3}{7} = 0.428571428571428571\ldots$$

Los números irracionales también pueden expresarse en forma decimal. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots, \qquad \pi = 3.1415926535\ldots$$

La representación decimal de un número racional o termina (como en $\frac{3}{8} = 0.375$) o se repite hasta el infinito en ciclos regulares (como en $\frac{13}{11} = 1.181818\ldots$). Un poco de experimentación con el algoritmo de la división le mostrará el porqué. (Observe que sólo puede haber un número finito de residuos diferentes). Un decimal que termina puede considerarse como un decimal periódico con ceros que se repiten. Por ejemplo,

$$\frac{3}{8} = 0.375 = 0.3750000\ldots$$

De esta manera, todo número racional puede escribirse como un decimal periódico. En otras palabras, si x es un número racional, entonces x puede escribirse como un decimal periódico. Es notable el hecho de que el recíproco también es verdadero, si x puede escribirse como un decimal periódico, entonces x es un número racional. Esto es obvio en el caso de decimales que terminan (por ejemplo, $3.137 = 3137/1000$), y es fácil demostrar para el caso de decimales no periódicos.

EJEMPLO 1 **(Los decimales periódicos son racionales).** Demuestre que $x = 0.136136136\ldots$ representa un número racional.

SOLUCIÓN Restamos x de $1000x$ y luego despejamos x.

$$\begin{aligned} 1000x &= 136.136136\ldots \\ x &= 0.136136\ldots \\ \hline 999x &= 136 \\ x &= \frac{136}{999} \end{aligned}$$

■

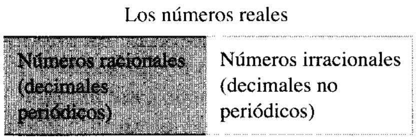


Figura 6

Las representaciones decimales de los números irracionales no se repiten en ciclos. Recíprocamente, un decimal no periódico debe representar un número irracional. Así, por ejemplo,

$$0.101001000100001\ldots$$

debe representar un número irracional (observe el patrón de más y más ceros entre los unos). El diagrama en la figura 6 resume lo que hemos dicho.

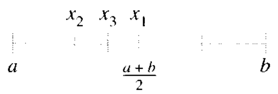


Figura 7

Densidad Entre cualesquiera dos números reales diferentes a y b, no importa qué tan cercanos se encuentren, existe otro número real. En particular, el número $x_1 = (a + b)/2$ es un número real que está a la mitad entre a y b (véase la figura 7). Ya que existe otro número real, x_2, entre a y x_1, y otro número real, x_3, entre x_1 y x_2, y puesto que este argumento puede repetirse *ad infinitum*, concluimos que existe un número infinito de números reales entre a y b. Por lo tanto, no existe cosa como "el menor número real, mayor que 3".

En realidad, podemos decir más. Entre cualesquiera dos números reales distintos existe tanto un número racional como uno irracional. (En el ejercicio 57 le pedimos demostrar que existe un número racional entre cualesquiera dos números reales). De aquí que, por medio del argumento precedente, existe una infinidad de cada uno de ellos (racionales e irracionales).

Una forma en que los matemáticos describen la situación que hemos expuesto es declarar que los números racionales y los números irracionales son **densos** en la recta real. Todo número tiene vecinos racionales e irracionales arbitrariamente cercanos a él.

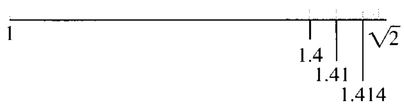


Figura 8

Una consecuencia de la propiedad de densidad es que cualquier número irracional puede aproximarse tanto como se quiera por medio de un número racional; de hecho, por medio de un número racional con una representación decimal finita. Tome como ejemplo $\sqrt{2}$. La sucesión de números racionales 1, 1.4, 1.41, 1414, 1.4142, 1.41421, 1.414213,... avanza constante e inexorablemente hacia $\sqrt{2}$ (véase la figura 8). Avanzando lo suficiente en esta sucesión, podemos estar tan cerca como queramos de $\sqrt{2}$.

Calculadoras y computadoras Actualmente, muchas calculadoras son capaces de realizar operaciones numéricas, gráficas y simbólicas. Durante décadas, las calculadoras han podido realizar operaciones numéricas, como dar aproximaciones decimales a $\sqrt{12.2}$ y 1.25 sen 22°. A principios de los años noventa del siglo pasado las calculadoras podían mostrar la gráfica de casi cualquier función algebraica, trigonométrica, exponencial o logarítmica. Los adelantos recientes permiten a las calculadoras realizar muchas operaciones, como desarrollar $(x - 3y)^{12}$ o resolver $x^3 - 2x^2 + x = 0$. Programas de cómputo como *Mathematica* o *Maple* pueden realizar operaciones simbólicas como éstas, así como una gran cantidad de otras.

Nuestras recomendaciones acerca del uso de una calculadora son:

1. Sepa reconocer cuando su calculadora —o computadora— le proporciona una respuesta exacta y cuando le da una aproximación. Por ejemplo, si pide sen 60°, su calculadora puede darle la respuesta exacta, $\sqrt{3}/2$, o bien puede darle una aproximación decimal, 0.8660254.
2. Por lo regular, y si es posible, se prefiere una respuesta exacta. Esto es especialmente cierto cuando usted debe utilizar el resultado para cálculos posteriores. Por ejemplo, si necesita elevar al cuadrado sen 60°, es más fácil y también más exacto, calcular $\left(\sqrt{3}/2\right)^2 = 3/4$ que calcular 0.8660254^2.
3. Si es posible, en problemas de aplicación proporcione una respuesta exacta, así como una aproximación. Puede verificar frecuentemente si su respuesta es razonable al relacionarla con la descripción del problema, observando su aproximación numérica a la solución.

Muchos problemas en este libro están marcados con un símbolo especial.

$\boxed{\text{C}}$ significa utilice una calculadora.

$\boxed{\text{GC}}$ significa utilice una calculadora graficadora.

$\boxed{\text{CAS}}$ significa utilice un sistema de álgebra computacional.

$\boxed{\text{EXPL}}$ significa que el problema le pide explorar e ir más allá de las explicaciones dadas en el texto.

Estimación Dado un problema aritmético complicado, un estudiante descuidado podría presionar algunas teclas en una calculadora y reportar la respuesta sin darse cuenta de que la falta de paréntesis o un "error de dedo" han dado un resultado erróneo. Un estudiante cuidadoso, con un sentido de los números, al presionar las mismas

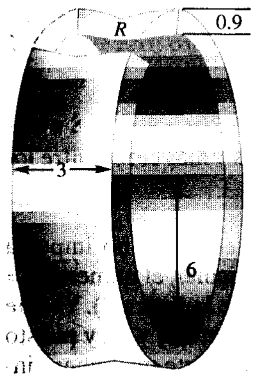


Figura 9

$\approx$
En el ejemplo 3 hemos utilizado $\approx$ para decir “aproximadamente igual a”. Utilice este símbolo cuando realice una aproximación. En un trabajo más formal no use este símbolo sin saber de qué tamaño podría ser el error.

Muchos problemas están marcados con este símbolo.

$\approx$ significa una estimación de la respuesta antes de resolver el problema; luego compruebe su respuesta contra esta estimación.

teclas se dará cuenta inmediatamente de que la respuesta es equivocada si es demasiado grande o demasiado pequeña, y volverá a calcularla de manera correcta. Es importante saber cómo se realiza una estimación mental.

EJEMPLO 2 Calcular $\left(\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}\right)/2.75$.

SOLUCIÓN Una estudiante juiciosa aproximó lo anterior como $(20 + 72 + 2)/3$ y dijo que la respuesta debería ser cercana a 30. Así, cuando su calculadora dio 93.448 como respuesta, ella desconfió (lo que en realidad había calculado fue $\sqrt{430} + 72 + \sqrt[3]{7.5}/2.75$).

Al calcular otra vez obtuvo la respuesta correcta: 34.434. ■

EJEMPLO 3 Suponga que la región sombreada R, que se muestra en la figura 9, se hace girar alrededor del eje x. Estime el volumen del anillo sólido, S, que resulta.

SOLUCIÓN La región R es de casi 3 unidades de largo y 0.9 unidades de altura. Estimamos su área como $3(0.9) \approx 3$ unidades cuadradas. Imagine que el anillo sólido, S, se abre y se aplana para formar una caja de alrededor de $2\pi r \approx 2(3)(6) = 36$ unidades de longitud. El volumen de una caja es el área de su sección transversal por su longitud. Así, estimamos el volumen de la caja como $3(36) = 108$ unidades cúbicas. Si lo calcula y obtiene 1000 unidades cúbicas, necesita verificar su trabajo. ■

El proceso de *estimación* es simplemente el sentido común combinado con aproximaciones razonables de los números. Lo exhortamos a utilizarlo con frecuencia, particularmente en problemas. Antes de obtener una respuesta precisa, haga una estimación. Si su respuesta está cerca de su estimación, no hay garantía de que su respuesta sea correcta. Por otra parte, si su respuesta y su estimación son demasiado diferentes, debe verificar su trabajo. Probablemente hay un error en su respuesta o en su aproximación. Recuerde que $\pi \approx 3$, $\sqrt{2} \approx 1.4$, $2^{10} \approx 1000$, 1 pie $\approx$ 10 pulgadas, 1 milla $\approx$ 5000 pies, etcétera.

Un tema central en este texto es el sentido numérico. Por esto queremos decir la habilidad de trabajar un problema y decir si su solución es razonable para el problema planteado. Un estudiante con buen sentido numérico reconocerá y corregirá de forma inmediata una respuesta que, obviamente, es poco razonable. Para muchos de los ejemplos desarrollados en el texto, proporcionamos una estimación inicial de la solución, antes de proceder a determinar la solución exacta.

Un poco de lógica. En matemáticas, a los resultados importantes se les llama **teoremas**; en este texto usted encontrará muchos teoremas. Los más importantes aparecen con la etiqueta *Teorema* y por lo regular se les dan nombres (por ejemplo, el Teorema de Pitágoras). Otros aparecen en los conjuntos de problemas y se introducen con las palabras *demuestre* o *pruebe que*. En contraste con los axiomas o definiciones, que se admiten, los teoremas requieren ser demostrados.

Muchos teoremas son establecidos en la forma “si P entonces Q”, o bien pueden enunciarse otra vez en esta forma. Con frecuencia, abreviamos el enunciado “si P entonces Q” por medio de $P \Rightarrow Q$, que también se lee “P implica Q”. Llamamos a P la *hipótesis* y a Q la *conclusión* del teorema. Una prueba (demostración) consiste en demostrar que Q debe ser verdadera siempre que P sea verdadera.

Los estudiantes que inician (incluso, algunos maduros) pueden confundir $P \Rightarrow Q$ con su **recíproco,** $Q \Rightarrow P$. Estas dos proposiciones no son equivalentes. “Si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano” es una proposición verdadera, pero su recíproca “si Juan es americano, entonces es de Missouri” podría no ser cierta.

La **negación** de la proposición P se escribe $\sim P$. Por ejemplo, si P es la proposición “está lloviendo”, entonces $\sim P$ es la proposición “no está lloviendo”. La proposición $\sim Q \Rightarrow \sim P$ se denomina **contrapositiva** (o contrarrecíproca) de la proposición $P \Rightarrow Q$ y es equivalente a $P \Rightarrow Q$. Por “equivalente” queremos decir que $P \Rightarrow Q$ y $\sim Q \Rightarrow \sim P$ son, ambas, verdaderas o ambas falsas. Para nuestro ejemplo acerca de Juan, la contrapositiva de “si Juan es de Missouri, entonces Juan es americano” es “si Juan no es americano, entonces Juan no es de Missouri”.

Como consecuencia de que una proposición y su contrapositiva sean equivalentes, podemos demostrar un teorema de la forma “si P entonces Q” demostrando su contrapositiva "si $\sim Q$ entonces $\sim P$". Así, para demostrar $P \Rightarrow Q$, podemos suponer $\sim Q$ e intentar deducir $\sim P$. A continuación está un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 4 Demuestre que si n^2 es par, entonces n es par.

Prueba La contrapositiva de este enunciado es "si n no es par, entonces n^2 no es par", que es equivalente a "si n es impar, entonces n^2 es impar". Demostraremos la contrapositiva. Si n es impar, entonces existe un entero k tal que $n = 2k + 1$. Entonces,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Por lo tanto, n^2 es igual a uno más que el doble de un entero. De aquí que n^2 es impar. ■

La *ley del tercero excluido* dice: sucede R o $\sim R$, pero no ambos. Cualquier demostración que inicia suponiendo que la conclusión de un teorema es falsa y procede para demostrar que esta suposición conduce a una contradicción se denomina **demostración por contradicción**.

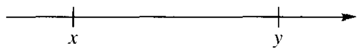
En ocasiones, necesitaremos otro tipo de demostración denominado **inducción matemática**. Nos alejaríamos demasiado en estos momentos para describir esto, pero hemos dado un estudio completo en el apéndice A.1.

Algunas veces, ambas proposiciones $P \Rightarrow Q$ (si P entonces Q) y $Q \Rightarrow P$ (si Q entonces P) son verdaderas. En este caso escribimos $P \Leftrightarrow Q$, que se lee "P si y sólo si Q". En el ejemplo 4 demostramos que "si n^2 es par, entonces n es par", pero el recíproco "si n es par, entonces n^2 es par" también es verdadero. Por lo tanto, diríamos "n es par si y sólo si n^2 es par".

Demostración por contradicción
La demostración por contradicción también lleva el nombre de *de reducción al absurdo*. He aquí lo que el gran matemático G. H. Hardy dijo acerca de ella: "La reducción al absurdo, que Euclides amaba tanto, es una de las armas más finas del matemático. Es muchísimo más fina que cualquier gambito en el ajedrez; un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o hasta de una pieza, pero un matemático ofrece el juego".

Orden en la recta real

Decir que $x < y$ significa que x está a la izquierda de y en la recta real.



Las propiedades de orden

1. **Tricotomía.** Si x y y son números, exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple:
   $x < y$ o $x = y$ o $x > y$
2. **Transitividad.** $x < y$ e $y < z \Rightarrow x < z$.
3. **Suma.** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
4. **Multiplicación.** Cuando z es positiva $x < y \Leftrightarrow xz < yz$. Cuando z es negativa, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

Orden

Los números reales diferentes de cero se separan, en forma adecuada, en dos conjuntos disjuntos, los números reales positivos y los números reales negativos. Este hecho nos permite introducir la relación de orden $<$ (se lee "es menor que") por medio de

$$\boxed{x < y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo}}$$

Acordamos que $x < y$ y $y > x$ significarán lo mismo. Así, $3 < 4$, $4 > 3$, $-3 < -2$ y $-2 > -3$.

La relación de orden $\leq$ (se lee "es menor o igual a") es prima hermana de $<$. Se define por medio de

$$\boxed{x \leq y \Leftrightarrow y - x \text{ es positivo o cero}}$$

Las propiedades de orden 2, 3 y 4, en el cuadro al margen, se cumplen al reemplazar los símbolos $<$ y $>$ por $\leq$ y $\geq$, respectivamente.

Cuantificadores

Muchas proposiciones matemáticas incluyen una variable x, y la validez de un enunciado depende del valor de x. Por ejemplo, la proposición "$\sqrt{x}$ es un número racional" depende del valor de x; es verdadero para algunos valores de x, tal como $x = 1, 4, 9$, $x = 1, 4, 9, \frac{4}{9}$, y $\frac{10{,}000}{49}$, y falso para otros valores de x, tales como $x = 2, 3, 77$ y π. Algunas proposiciones, tales como "$x^2 \geq 0$", son verdaderas para todo número real x, y otras proposiciones, tales como "x es un entero par mayor que 2 y x es un número primo", siempre son falsas. Denotaremos con $P(x)$ un enunciado cuyo valor de verdad depende del valor de x.

Decimos "para toda x, $P(x)$" o "para cada x, $P(x)$", cuando la proposición $P(x)$ es verdadera para todo valor de x. Cuando al menos existe un valor de x para el cual es verdadera, decimos "existe una x tal que $P(x)$". Los dos importantes *cuantificadores* son "para todo" y "existe".

EJEMPLO 5 ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(a) Para toda x, $x^2 > 0$.
(b) Para toda x, $x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$.
(c) Para cada x, existe una y tal que $y > x$.
(d) Existe una y tal que, para toda x, $y > x$.

SOLUCIÓN

(a) Falsa. Si elegimos $x = 0$, entonces no es verdadero que $x^2 > 0$.
(b) Verdadera. Si x es negativa, entonces x^2 será positiva.
(c) Verdadera. Esta proposición contiene dos cuantificadores, "para cada" y "existe". Para leer el enunciado de manera correcta, debemos aplicarlo en el orden correcto. La proposición inicia "para cada", de modo que si la proposición es verdadera, entonces lo que sigue debe ser verdadero para todo valor de x que seleccionemos. Si no está seguro de que el enunciado completo sea verdadero, intente con algunos valores de x y vea si la segunda parte del enunciado es verdadero o falso. Por ejemplo, podríamos elegir $x = 100$, dada esta elección; ¿existe una y que sea mayor a x? En otras palabras, ¿existe un número mayor que 100? Por supuesto que sí. El número 101 lo es. Ahora, seleccionemos otro valor para x, digamos $x = 1{,}000{,}000$. ¿Existe una y que sea mayor que este valor de x? Nuevamente, sí; en este caso el número 1,000,001 lo sería. Ahora, pregúntese: "Si tengo que x es cualquier número real, ¿podré encontrar una y que sea mayor a x?" La respuesta es sí. Basta con elegir a y como $x + 1$.
(d) Falsa. El enunciado dice que existe un número real que es mayor que todos los demás números reales. En otras palabras, existe un número real que es el mayor de todos. Esto es falso; aquí está una demostración por contradicción. Suponga que existe un número real mayor que todos, y. Sea $x = y + 1$. Entonces $x > y$, lo cual es contrario a la suposición de que y es el mayor número real. ■

La **negación** de la proposición P es la proposición "no P". (La proposición "no P" es verdadera siempre que P sea falsa). Considere la negación de la proposición "para toda x, $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces debe existir al menos un valor de x para el cual $P(x)$ es falsa; en otras palabras, existe una x tal que "no $P(x)$". Ahora considere la negación de la proposición "existe un x tal que $P(x)$". Si la negación de esta proposición es verdadera, entonces no existe una x para la cual $P(x)$ sea verdadera. Esto significa que $P(x)$ es falsa sin importar el valor de x. En otras palabras, "para toda x, no $P(x)$". En resumen,

La negación de "para toda x, $P(x)$" es "existe una x tal que no $P(x)$".

La negación de "existe una x tal que $P(x)$" es "para toda x, no $P(x)$".

Revisión de conceptos

1. Los números que pueden escribirse como la razón (cociente) de dos enteros se denominan ________.

2. Entre cualesquiera dos números reales, existe otro número real. Esto significa que los números reales son _______.

3. La contrapositiva (contrarrecíproca) de "si P entonces Q" es _______.

4. Los axiomas y las definiciones son tomados como ciertos, pero_______ requieren de una demostración.

Conjunto de problemas 0.1

En los problemas del 1 al 16 simplifique tanto como sea posible. Asegúrese de eliminar todos los paréntesis y reducir todas las fracciones.

1. $4 - 2(8 - 11) + 6$

2. $3[2 - 4(7 - 12)]$

3. $-4[5(-3 + 12 - 4) + 2(13 - 7)]$

4. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$

5. $\frac{5}{7} - \frac{1}{13}$

6. $\frac{3}{4 - 7} + \frac{3}{21} - \frac{1}{6}$

7. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\right]$

8. $-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$

9. $\dfrac{14}{21}\left(\dfrac{2}{5 - \frac{1}{3}}\right)^2$

10. $\left(\frac{2}{7} - 5\right)/\left(1 - \frac{1}{7}\right)$

11. $\dfrac{\frac{11}{7} - \frac{12}{21}}{\frac{11}{7} + \frac{12}{21}}$

12. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$

13. $1 - \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

14. $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}}$

15. $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$

16. $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$

En los problemas del 17 al 28 realice las operaciones indicadas y simplifique.

17. $(3x - 4)(x + 1)$

18. $(2x - 3)^2$

19. $(3x - 9)(2x + 1)$

20. $(4x - 11)(3x - 7)$

21. $(3t^2 - t + 1)^2$

22. $(2t + 3)^3$

23. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

24. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

25. $\dfrac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$

26. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

27. $\dfrac{12}{x^2 + 2x} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x + 2}$

28. $\dfrac{2}{6y - 2} + \dfrac{y}{9y^2 - 1}$

29. Determine el valor de cada una de las expresiones siguientes; si no está definida, indíquelo

(a) $0 \cdot 0$ (b) $\frac{0}{0}$ (c) $\frac{0}{17}$

(d) $\frac{3}{0}$ (e) 0^5 (f) 17^0

30. Demuestre que la división entre 0 no tiene significado como sigue: Suponga que $a \neq 0$. Si $a/0 = b$, entonces $a = 0 \cdot b = 0$, lo cual es una contradicción. Ahora determine una razón por la que $0/0$ también carece de significado.

En los problemas del 31 al 36 cambie cada número racional a uno decimal mediante una división larga.

31. $\frac{1}{12}$

32. $\frac{2}{7}$

33. $\frac{3}{21}$

34. $\frac{5}{17}$

35. $\frac{11}{3}$

36. $\frac{11}{13}$

En los problemas del 37 al 42 cambie cada decimal periódico por una razón de dos enteros (véase el ejemplo 1).

37. $0.123123123\ldots$

38. $0.217171717\ldots$

39. $2.56565656\ldots$

40. $3.929292\ldots$

41. $0.199999\ldots$

42. $0.399999\ldots$

43. Como $0.199999\ldots = 0.200000\ldots$ y $0.399999\ldots = 0.400000\ldots$ (véanse los problemas 41 y 42), vemos que ciertos números racionales tienen diferentes expansiones decimales. ¿Cuáles son los números racionales que tienen esta propiedad?

44. Demuestre que cualquier número racional p/q, para el cual la factorización en primos de q consiste sólo en números 2 y números 5, tiene un desarrollo decimal finito.

45. Encuentre un número racional positivo y un número irracional positivo menores que 0.00001.

46. ¿Cuál es el menor entero positivo? ¿El menor racional positivo? ¿El menor número irracional positivo?

47. Encuentre un número racional entre 3.14159 y π. Note que $\pi = 3.141592\ldots$.

48. ¿Existe un número entre 0.9999... (los 9 se repiten) y 1? ¿Cómo concilia esto con el enunciado de que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe otro número real?

49. ¿El número 0.1234567891011121314... es racional o irracional? (Debe observar un patrón en la sucesión de dígitos dada).

50. Encuentre dos números irracionales cuya suma sea racional.

En los problemas del 51 al 56 determine la mejor aproximación decimal que su calculadora permita. Inicie haciendo una estimación mental.

51. $(\sqrt{3} + 1)^3$

52. $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^4$

53. $\sqrt[4]{1.123} - \sqrt[3]{1.09}$

54. $(3.1415)^{-1/2}$

55. $\sqrt{8.9\pi^2 + 1} - 3\pi$

56. $\sqrt[4]{(6\pi^2 - 2)\pi}$

57. Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe un número racional. (*Sugerencia:* si $a < b$, entonces $b - a > 0$, así que existe un número natural n tal que $1/n < b - a$. Considere el conjunto $\{k{:}k/n > b\}$ y utilice el hecho de que un conjunto de enteros que está acotado por abajo contiene un elemento menor). Demuestre que entre cualesquiera dos números reales diferentes existe una infinidad de números racionales.

58. Estime el volumen de su cabeza, en pulgadas cúbicas.

59. Estime la longitud del ecuador, en pies. Suponga que el radio de la Tierra es de 4000 millas.

60. ¿Alrededor de cuántas veces habrá latido su corazón en su vigésimo cumpleaños?

61. El árbol llamado General Sherman, que está en California, tiene una altura de casi 270 pies y promedia alrededor de 16 pies de diámetro. Estime el número de tablones de madera de 1 pulgada por 12 pulgadas por 12 pulgadas que podrían fabricarse con este árbol, suponiendo que no haya desperdicio e ignorando las ramas.

62. Suponga que cada año, el árbol General Sherman (véase el problema 61) produce un anillo de crecimiento de un grosor de 0.004 pies. Estime el aumento anual resultante en el volumen de su tronco.

63. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si hoy llueve, entonces trabajaré en casa.

(b) Si la candidata satisface todos los requisitos, entonces será contratada.

64. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si obtengo una A en el examen final, aprobaré el curso.

(b) Si termino mi artículo de investigación para el viernes, entonces tomaré un descanso la semana próxima.

65. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) (Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo.) Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

(b) Si el ángulo ABC es agudo, entonces su medida es mayor que 0° y menor que 90°.

66. Escriba el recíproco y el contrapositivo de los siguientes enunciados.

(a) Si la medida del ángulo ABC es 45°, entonces el ángulo ABC es agudo.

(b) Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

67. Considere los enunciados del problema 65 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

68. Considere los enunciados del problema 66 junto con sus recíprocos y contrapositivos. ¿Cuáles son verdaderos?

69. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo triángulo isósceles es equilátero.

(b) Existe un número real que no es entero.

(c) Todo número natural es menor o igual a su cuadrado.

70. Utilice las reglas acerca de la negación de proposiciones que incluyen cuantificadores para escribir la negación de las siguientes proposiciones. ¿Cuál es verdadera, la proposición original o su negación?

(a) Todo número natural es racional.

(b) Existe un círculo cuya área es mayor que 9π.

(c) Todo número real es mayor que su cuadrado.

71. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos? Suponga que x y y son números reales.

(a) Para toda x, $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

(b) Para toda x, $x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$.

(c) Para toda x, $x^2 > x$.

(d) Para toda x, existe una y tal que $y > x^2$.

(e) Para todo número positivo y, existe otro número positivo x tal que $0 < x < y$.

72. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas? A menos que se diga lo contrario, suponga que x, y y ε son números reales.

(a) Para toda x, $x < x + 1$.

(b) Existe un número natural N, tal que todos los números primos son menores que N. (Un **número primo** es un número natural mayor que 1 cuyos únicos factores son 1 y él mismo.)

(c) Para cada $x > 0$, existe una y tal que $y > \frac{1}{x}$.

(d) Para toda x positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.

(e) Para cada ε positiva, existe un número natural n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

73. Demuestre las siguientes proposiciones.

(a) Si n es impar, entonces n^2 es impar. (*Sugerencia:* si n es **impar**, entonces existe un entero k, tal que $n = 2k + 1$).

(b) Si n^2 es impar, entonces n es impar. (*Sugerencia:* demuestre la contrapositiva).

74. Demuestre que n es impar si y sólo si n^2 es impar. (Véase el problema 73).

75. De acuerdo con el **Teorema fundamental de la aritmética**, todo número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de primos, de una forma única, salvo por el orden de los factores. Por ejemplo, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Escriba cada uno de los siguientes números como un producto de primos.

(a) 243 (b) 124 (c) 5100

76. Utilice el Teorema fundamental de la aritmética (véase el problema 75) para demostrar que el cuadrado de cualquier número natural (distinto de 1) puede escribirse como el producto de un conjunto único de primos, excepto por el orden de los factores, cada uno de los cuales aparece un número *pàr* de veces. Por ejemplo, $(45)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

77. Demuestre que $\sqrt{2}$ es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción. Suponga que $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números naturales (necesariamente distintos de 1). Entonces $2 = p^2/q^2$, de modo que $2q^2 = p^2$. Ahora utilice el problema 76 para obtener una contradicción.

78. Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional (véase el problema 77).

79. Demuestre que la suma de dos números racionales es racional.

80. Demuestre que el producto de un número racional (distinto de 0) y un número irracional es irracional. *Sugerencia:* intente una demostración por contradicción.

81. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales?

(a) $-\sqrt{9}$ (b) 0.375

(c) $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$ (d) $(1 + \sqrt{3})^2$

82. Un número b se denomina **cota superior** para un conjunto S de números, si $x \le b$ para toda x en S. Por ejemplo, 5, 6.5 y 13 son cotas superiores para el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. El número 5 es la **mínima cota superior** para S (la más pequeña de las cotas superiores). De manera análoga, 1.6, 2 y 2.5 son cotas superiores para el conjunto infinito $T = \{1.4, 1.49, 1.499, 1.4999, \ldots\}$ mientras que 1.5 es la mínima cota superior. Encuentre la mínima cota superior para cada uno de los siguientes conjuntos,

(a) $S = \{-10, -8, -6, -4, -2\}$

(b) $S = \{-2, -2.1, -2.11, -2.111, -2.1111, \ldots\}$

(c) $S = \{2.4, 2.44, 2.444, 2.4444, \ldots\}$

(d) $S = \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

(e) $S = \{x | x = (-1)^n + 1/n, n$ es un entero positivo$\}$; esto es, S es el conjunto de todos los números x que tienen la forma $x = (-1)^n + 1/n$, donde n es un entero positivo.

(f) $S = \{x : x^2 < 2, x$ es un número racional$\}$.

EXPL **83.** El axioma de completez para los números reales dice: *todo conjunto de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior que es un número real.*

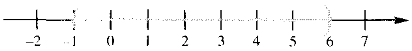
(a) Demuestre que la proposición en cursivas es falsa si las palabras *reales* y *real* se reemplazan por *racionales* y *racional*, respectivamente.

(b) ¿La proposición en cursivas será verdadera o falsa si las palabras *reales* y *real* fuesen reemplazadas por *naturales* y *natural*, respectivamente?

Respuestas a la revisión de conceptos **1.** números racionales **2.** densos **3.** "Si no Q entonces no P". **4.** teoremas

0.2 Desigualdades y valor absoluto

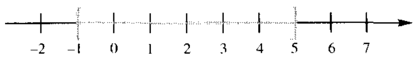
La resolución de ecuaciones (por ejemplo, $3x - 17 = 6$ o $x^2 - x - 6 = 0$) es una de las tareas tradicionales de las matemáticas; en este curso será importante y suponemos que usted recordará cómo hacerlo. Pero, casi de igual importancia en cálculo es la noción de resolver una desigualdad (por ejemplo, $3x - 17 < 6$ o $x^2 - x - 6 \ge 0$). **Resolver** una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que hace que la desigualdad sea verdadera. En contraste con una ecuación, cuyo conjunto solución por lo regular consiste en un número o quizá en un conjunto finito de números, el conjunto solución de una desigualdad por lo regular es un intervalo completo de números o, en algunos casos, la unión de tales intervalos.



$(-1, 6) = \{x : -1 < x < 6\}$

Figura 1

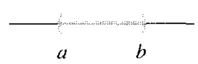
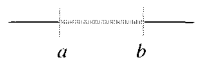
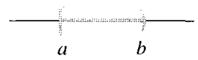
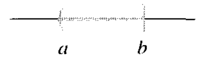
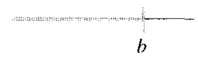
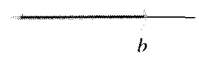
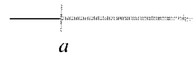
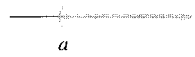
Intervalos Varias clases de intervalos surgirán en nuestro trabajo, para los cuales introducimos una terminología y notación especial. La desigualdad $a < x < b$, que en realidad son dos desigualdades, $a < x$ y $x < b$, describe un **intervalo abierto** que consiste en todos los números entre a y b, pero que no incluye los puntos extremos a y b. Lo denotamos por medio del símbolo (a, b) (véase la figura 1). En contraste, la desigualdad $a \le x \le b$ describe el correspondiente **intervalo cerrado**, que incluye los extremos a y b.



$[-1, 5] = \{x : -1 \leq x \leq 5\}$

Figura 2

Se denota como $[a, b]$ (véase la figura 2). La tabla indica la amplia variedad de posibilidades e introduce nuestra notación.

Notación de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Resolución de desigualdades Como con las ecuaciones, el procedimiento para resolver una desigualdad consiste en transformar la desigualdad un paso a la vez hasta que el conjunto solución sea obvio. Podemos realizar ciertas operaciones en ambos lados de una desigualdad sin cambiar su conjunto solución. En particular:

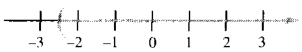
1. Podemos sumar el mismo número a ambos lados de una desigualdad.
2. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número positivo.
3. Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por el mismo número negativo, pero entonces debemos invertir el sentido del signo de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $2x - 7 < 4x - 2$ y muestre la gráfica de su conjunto solución.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
2x - 7 &< 4x - 2 \\
2x &< 4x + 5 && \text{(sume 7)} \\
-2x &< 5 && \text{(sume } -4x\text{)} \\
x &> -\tfrac{5}{2} && \text{(multiplique por } -\tfrac{1}{2}\text{)}
\end{aligned}
$$

La gráfica aparece en la figura 3.



$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\frac{5}{2}\right\}$

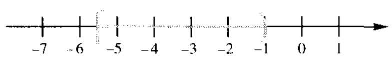
Figura 3

EJEMPLO 2 Resuelva $-5 \leq 2x + 6 < 4$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
-5 \leq 2x + 6 &< 4 \\
-11 \leq 2x \quad &< -2 && \text{(sume } -6\text{)} \\
-\tfrac{11}{2} \leq x \quad &< -1 && \text{(multiplique por } \tfrac{1}{2}\text{)}
\end{aligned}
$$

La figura 4 muestra la gráfica correspondiente.



$\left[-\frac{11}{2}, -1\right) = \left\{x : -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$

Figura 4

Antes de abordar una desigualdad cuadrática hacemos notar que un factor lineal de la forma $x - a$ es positivo para $x > a$ y negativo para $x < a$. Se deduce que un producto $(x - a)(x - b)$ puede cambiar de positivo a negativo, y viceversa, sólo en a o b. Estos puntos, en donde el factor es cero, se denominan **puntos de separación**. Estos puntos son la clave para determinar los conjuntos solución de desigualdades cuadráticas y otras desigualdades más complicadas.

EJEMPLO 3 Resuelva la desigualdad cuadrática $x^2 - x < 6$.

SOLUCIÓN Como con las ecuaciones cuadráticas, pasamos todos los términos distintos de cero a un lado y factorizamos.

$$\begin{aligned} x^2 - x &< 6 \\ x^2 - x - 6 &< 0 \qquad \text{(sume } -6\text{)} \\ (x-3)(x+2) &< 0 \qquad \text{(factorice)} \end{aligned}$$

Punto de prueba	Signo de $(x-3)$	$(x+2)$	Signo de $(x-3)(x+2)$
-3	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$
5	$+$	$+$	$+$

Vemos que -2 y 3 son los puntos de separación; dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$. En cada uno de estos intervalos $(x - 3)(x + 2)$ conserva el signo; esto es, ahí siempre es positivo o siempre negativo. Para determinar este signo en cada intervalo, utilizamos los **puntos de prueba** $-3, 0$ y 5 (cualesquiera otros puntos en estos intervalos sirven). Nuestros resultados se muestran en la tabla al margen.

La información que hemos obtenido se resume en la parte superior de la figura 5. Concluimos que el conjunto solución para $(x - 3)(x + 2) < 0$ es el intervalo $(-2, 3)$. Su gráfica se muestra en la parte inferior de la figura 5. ■

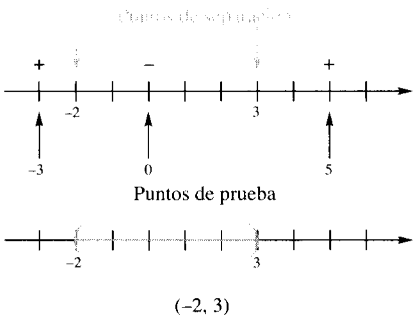


Figura 5

EJEMPLO 4 Resuelva $3x^2 - x - 2 > 0$.

SOLUCIÓN Ya que

$$3x^2 - x - 2 = (3x + 2)(x - 1) = 3(x - 1)\left(x + \tfrac{2}{3}\right)$$

los puntos de separación son $-\frac{2}{3}$ y 1. Estos puntos, junto con los puntos de prueba $-2, 0$ y 2, establecen la información que se muestra en la parte superior de la figura 6. Concluimos que el conjunto solución de la desigualdad consiste en los puntos que se encuentran en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ o en $(1, \infty)$. En el lenguaje de conjuntos es la **unión** (simbolizada con $\cup$) de estos dos intervalos; esto es, es$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$. ■

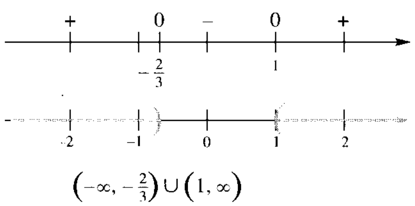


Figura 6

EJEMPLO 5 Resuelva $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0$.

SOLUCIÓN Nuestra inclinación a multiplicar ambos lados por $x + 2$ conduce a un dilema inmediato, dado que $x + 2$ puede ser positivo o negativo. ¿Debemos invertir el signo de la desigualdad o dejarlo como está? En lugar de tratar de desenredar este problema (que requeriría dividirlo en dos casos), observamos que el cociente $(x - 1)/(x + 2)$ puede cambiar de signo en los puntos de separación del numerador y del denominador, esto es, en 1 y -2. Los puntos de prueba $-3, 0$ y 2 proporcionan la información de la parte superior de la figura 7. El símbolo n indica que el cociente *no* está definido en -2. Concluimos que el conjunto solución es $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. Observe que -2 no pertenece al conjunto solución ya que ahí el cociente está indefinido. Por otra parte, 1 está incluido ya que la desigualdad se cumple cuando $x = 1$. ■

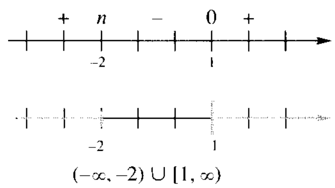


Figura 7

EJEMPLO 6 Resuelva $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \leq 0$.

SOLUCIÓN Los puntos de separación son -1, 1 y 3, los cuales dividen la recta real en cuatro intervalos, como se muestra en la figura 8. Después de probar todos estos intervalos, concluimos que el conjunto solución es $[-1, 1] \cup [1, 3]$ que es el intervalo $[-1, 3]$. ■

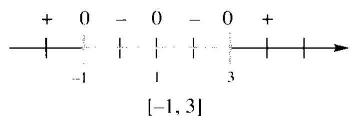


Figura 8

EJEMPLO 7 Resuelva $2.9 < \dfrac{1}{x} < 3.1$.

SOLUCIÓN Es tentador multiplicar por x, pero esto nuevamente lleva al dilema de que x puede ser positiva o negativa. Sin embargo, en este caso, $\frac{1}{x}$ debe estar entre 2.9 y 3.1, lo cual garantiza que x es positivo. Por lo tanto, es válido multiplicar por x y no invertir las desigualdades. Así,

$$2.9x < 1 < 3.1x$$

En este punto debemos dividir esta desigualdad compuesta en dos desigualdades, que resolvemos de manera separada

$$2.9x < 1 \quad \text{y} \quad 1 < 3.1x$$

$$x < \frac{1}{2.9} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3.1} < x$$

Cualquier valor de x que satisfaga la desigualdad original debe satisfacer ambas desigualdades. Por lo tanto, el conjunto solución consiste en aquellos valores de x que satisfacen

$$\frac{1}{3.1} < x < \frac{1}{2.9}$$

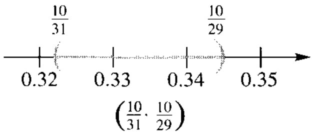


Figura 9

Esta desigualdad puede escribirse como

$$\frac{10}{31} < x < \frac{10}{29}$$

El intervalo $\left(\frac{10}{31}, \frac{10}{29}\right)$ se muestra en la figura 9. ∎

Valores absolutos El concepto de valor absoluto es extremadamente útil en cálculo, y el lector debe adquirir habilidad para trabajar con él. El **valor absoluto** de un número real x, denotado por $|x|$ está definido como

$$\boxed{\begin{array}{ll} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{array}}$$

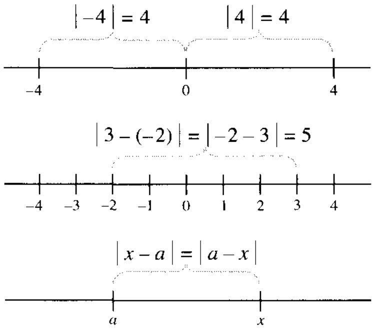


Figura 10

Por ejemplo, $|6| = 6$, $|0| = 0$ y $|-5| = -(-5) = 5$. Esta definición dada en dos partes merece un estudio cuidadoso. Observe que no dice que $|-x| = x$ (para ver por qué, pruebe con -5). Es cierto que $|x|$ siempre es no negativo; también es verdadero que $|-x| = |x|$.

Una de las mejores formas de pensar en el valor absoluto de un número es como una distancia no dirigida. En particular, $|x|$ es la distancia entre x y el origen. De manera análoga, $|x - a|$ es la distancia entre x y a (véase la figura 10).

Propiedades El valor absoluto se comporta de manera adecuada con la multiplicación y la división, pero no así con la suma y la resta.

Propiedades del valor absoluto

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad del triángulo)
4. $|a - b| \geq ||a| - |b||$

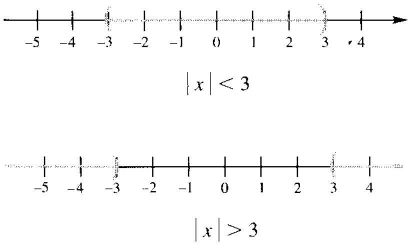


Figura 11

Desigualdades que incluyen valores absolutos Si $|x| < 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser menor que 3. En otras palabras, x debe ser simultáneamente menor que 3 *y* mayor que -3; esto es, $-3 < x < 3$. Por otra parte, si $|x| > 3$, entonces la distancia entre x y el origen debe ser mayor que 3. Esto puede suceder cuando $x > 3$ *o* $x < -3$ (véase la figura 11). Éstos son casos especiales de las siguientes proposiciones generales que se cumplen cuando $a > 0$.

(1) $$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad \text{o} \quad x > a$$

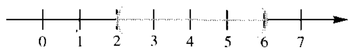
Podemos utilizar estos hechos para resolver desigualdades que impliquen valores absolutos, ya que proporcionan una manera de quitar los signos de valor absoluto.

EJEMPLO 8 Resuelva la desigualdad $|x - 4| < 2$ y muestre el conjunto solución en la recta real. Interprete el valor absoluto como una distancia.

SOLUCIÓN Con base en las proposiciones en (1), sustituyendo x por $x - 4$, vemos que

$$|x - 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2$$

Cuando sumamos 4 a los tres miembros de esta última desigualdad, obtenemos $2 < x < 6$. La gráfica se muestra en la figura 12.



$|x-4|<2$

Figura 12

En términos de distancia, el símbolo $|x - 4|$ representa la distancia entre x y 4. Por lo tanto, la desigualdad dice que la distancia entre x y 4 debe ser menor a 2. Los números x con esta propiedad son los números entre 2 y 6; esto es, $2 < x < 6$. ■

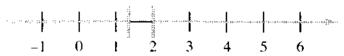
Las proposiciones (1) dadas antes del ejemplo 8 son válidas cuando $<$ y $>$ son reemplazadas por $\leq$ y $\geq$, respectivamente. Necesitamos la segunda proposición en esta forma para nuestro ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Resuelva la desigualdad $|3x - 5| \geq 1$ y muestre su conjunto solución en la recta real.

SOLUCIÓN La desigualdad dada puede escribirse de manera sucesiva como

$$\begin{array}{rclcrcl} 3x - 5 & \leq & -1 & \text{o} & 3x - 5 & \geq & 1 \\ 3x & \leq & 4 & \text{o} & 3x & \geq & 6 \\ x & \leq & \frac{4}{3} & \text{o} & x & \geq & 2 \end{array}$$

El conjunto solución es la unión de dos intervalos, $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$, y se muestra en la figura 13. ■



$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$

Figura 13

En el capítulo 1 necesitaremos hacer la clase de manipulaciones que se ilustran en los dos ejemplos siguientes. Delta (δ) y épsilon (ε) son la cuarta y quinta letras, respectivamente, del alfabeto griego y se utilizan de manera tradicional para representar números positivos pequeños.

EJEMPLO 10 Sea ε (épsilon) un número positivo. Demuestre que

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$$

En términos de distancia, esto dice que la distancia entre x y 2 es menor que $\varepsilon/5$, si y sólo si la distancia entre $5x$ y 10 es menor que ε.

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rlrll} |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} & \Leftrightarrow & 5|x - 2| & < \varepsilon & \text{(multiplique por 5)} \\ & \Leftrightarrow & |5|\,|(x - 2)| & < \varepsilon & (|5| = 5) \\ & \Leftrightarrow & |5(x - 2)| & < \varepsilon & (|a||b| = |ab|) \\ & \Leftrightarrow & |5x - 10| & < \varepsilon & \end{array}$$ ■

Determinación de delta

Observe dos hechos acerca de nuestra solución para el ejemplo 11.

1. El número que encontramos para δ debe depender de ε. nuestra elección es $\delta = \varepsilon/6$.
2. Cualquier número positivo δ más pequeño que $\varepsilon/6$ es aceptable. Por ejemplo $\delta = \varepsilon/7$ o $\delta = \varepsilon/(2\pi)$ son otras opciones correctas.

EJEMPLO 11 Sea ε un número positivo. Encuentre un número positivo δ (delta) tal que

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rll} |6x - 18| < \varepsilon & \Leftrightarrow |6(x - 3)| < \varepsilon & \\ & \Leftrightarrow 6|x - 3| < \varepsilon & (|ab| = |a||b|) \\ & \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6} & \left(\text{multiplique por } \frac{1}{6}\right) \end{array}$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \varepsilon/6$. Siguiendo las implicaciones de regreso, vemos que

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon$$ ■

A continuación se presenta un problema práctico que utiliza el mismo tipo de razonamiento.

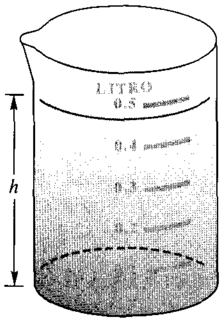


Figura 14

EJEMPLO 12 Un vaso de precipitados de $\frac{1}{2}$ litro (500 centímetros cúbicos) tiene un radio interno de 4 centímetros. ¿Con qué exactitud debemos medir la altura h del agua en el vaso para asegurar que tenemos $\frac{1}{2}$ litro de agua con un error de menos de 1%, esto es, un error de menos de 5 centímetros cúbicos? Véase la figura 14.

SOLUCIÓN El volumen V de agua en el vaso está dado por la fórmula $V = 16\pi h$. Queremos que $|V - 500| < 5$ o, de manera equivalente, $|16\pi h - 500| < 5$. Ahora

$$\begin{aligned}|16\pi h - 500| < 5 &\Leftrightarrow \left|16\pi\left(h - \frac{500}{16\pi}\right)\right| < 5\\ &\Leftrightarrow 16\pi\left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < 5\\ &\Leftrightarrow \left|h - \frac{500}{16\pi}\right| < \frac{5}{16\pi}\\ &\Leftrightarrow |h - 9.947| < 0.09947 \approx 0.1\end{aligned}$$

Así, debemos medir la altura con una precisión de alrededor de 1 milímetro. ■

Notación para las raíces cuadradas

Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Por ejemplo, las dos raíces cuadradas de 9 son 3 y −3. En ocasiones, representamos estos dos números como ±3. Para $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$, que se denomina **raíz cuadrada principal** de a, denota la raíz cuadrada no negativa de a. Por lo tanto, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt{121} = 11$. Es incorrecto escribir $\sqrt{16} = \pm 4$ ya que $\sqrt{16}$ significa la raíz cuadrada no negativa de 16; esto es, 4. El número 7 tiene dos raíces cuadradas, que se escriben como $\pm\sqrt{7}$, pero $\sqrt{7}$ representa un solo número real. Recuerde esto:

$$a^2 = 16$$

tiene dos soluciones, $a = -4$ y $a = 4$, pero

$$\sqrt{16} = 4$$

Fórmula cuadrática

La mayoría de los estudiantes recordarán la **Fórmula cuadrática**. Las soluciones a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

El número $d = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. Esta ecuación tiene dos soluciones reales si $d > 0$, una solución real si $d = 0$ y soluciones no reales si $d < 0$. Con la fórmula cuadrática, fácilmente podemos resolver desigualdades cuadráticas, incluso, si no se pueden factorizar por inspección.

EJEMPLO 13 Resuelva $x^2 - 2x - 4 \leq 0$.

SOLUCIÓN Las dos soluciones de $x^2 - 2x - 4 = 0$ son

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 - \sqrt{5} \approx -1.24$$

y

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 + \sqrt{5} \approx 3.24$$

Así,

$$x^2 - 2x - 4 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$$

Los puntos de separación $1 - \sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$ dividen a la recta real en tres intervalos (véase la figura 15). Cuando los comprobamos con los puntos de prueba −2, 0 y 4, concluimos que el conjunto solución para $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ es $\left[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right]$. ■

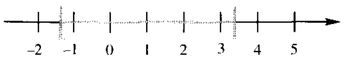


Figura 15

Cuadrados

Regresando a los cuadrados, notemos que

$$\boxed{|x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad |x| = \sqrt{x^2}}$$

Notación para raíces
Si n es número par y $a \geq 0$, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ denota la raíz n-ésima no negativa de a. Cuando n es impar, sólo existe una raíz n-ésima real de a, denotada por el símbolo $\sqrt[n]{a}$. Por lo tanto, $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, y $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Esto se deduce de la propiedad $|a||b| = |ab|$.

¿La operación de elevar al cuadrado preserva las desigualdades? En general, la respuesta es no. Por ejemplo, $-3 < 2$, pero $(-3)^2 > 2^2$. Por otra parte, $2 < 3$ y $2^2 < 3^2$. Si tratamos con números no negativos, entonces $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Una variante útil de esto (véase el problema 63) es

$$\boxed{|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2}$$

EJEMPLO 14 Resuelva la desigualdad $|3x + 1| < 2|x - 6|$.

SOLUCIÓN Esta desigualdad es más difícil de resolver que nuestros ejemplos anteriores, debido a que hay dos signos de valor absoluto. Podemos eliminar ambos al usar el resultado del último recuadro.

$$\begin{aligned}
|3x + 1| < 2|x - 6| &\Leftrightarrow |3x + 1| < |2x - 12| \\
&\Leftrightarrow (3x + 1)^2 < (2x - 12)^2 \\
&\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144 \\
&\Leftrightarrow 5x^2 + 54x - 143 < 0 \\
&\Leftrightarrow (x + 13)(5x - 11) < 0
\end{aligned}$$

Los puntos de separación para esta desigualdad cuadrática son -13 y $\frac{11}{5}$; estos puntos dividen la recta real en tres intervalos $(-\infty, -13)$, $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$, y $\left(\frac{11}{5}, \infty\right)$. Cuando utilizamos los puntos de prueba -14, 0 y 3, descubrimos que sólo los puntos en $\left(-13, \frac{11}{5}\right)$ satisfacen la desigualdad. ■

Revisión de conceptos

1. El conjunto $\{x: -1 \leq x < 5\}$ se escribe en notación de intervalos como _______ y el conjunto $\{x: x \leq -2\}$ se escribe como _______.

2. Si $a/b < 0$, entonces $a < 0$ y _______ o bien $a > 0$ y _______.

3. ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes siempre son verdaderas?

(a) $|-x| = x$ (b) $|x|^2 = x^2$

(c) $|xy| = |x||y|$ (d) $\sqrt{x^2} = x$

4. La desigualdad $|x - 2| \leq 3$ es equivalente a _______ $\leq x \leq$ _______.

Conjunto de problemas 0.2

1. Muestre cada uno de los intervalos siguientes en la recta real.

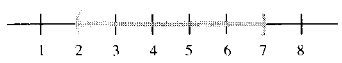
(a) $[-1, 1]$ (b) $(-4, 1]$

(c) $(-4, 1)$ (d) $[1, 4]$

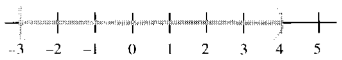
(e) $[-1, \infty)$ (f) $(-\infty, 0]$

2. Utilice la notación del problema 1 para describir los intervalos siguientes.

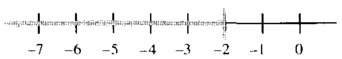
(a)



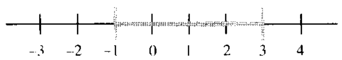
(b)



(c)



(d)



En cada problema del 3 al 26 exprese el conjunto solución de la desigualdad dada en notación de intervalos y bosqueje su gráfica.

3. $x - 7 < 2x - 5$

4. $3x - 5 < 4x - 6$

5. $7x - 2 \leq 9x + 3$

6. $5x - 3 > 6x - 4$

7. $-4 < 3x + 2 < 5$

8. $-3 < 4x - 9 < 11$

9. $-3 < 1 - 6x \leq 4$

10. $4 < 5 - 3x < 7$

11. $x^2 + 2x - 12 < 0$

12. $x^2 - 5x - 6 > 0$

13. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

14. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

15. $\dfrac{x + 4}{x - 3} \leq 0$

16. $\dfrac{3x - 2}{x - 1} \geq 0$

17. $\dfrac{2}{x} < 5$

18. $\dfrac{7}{4x} \leq 7$

19. $\dfrac{1}{3x - 2} \leq 4$

20. $\dfrac{3}{x + 5} > 2$

21. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$

22. $(2x + 3)(3x - 1)(x - 2) < 0$

23. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) \geq 0$

24. $(2x - 3)(x - 1)^2(x - 3) > 0$

25. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$ **26.** $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

27. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-3 < -7$ (b) $-1 > -17$ (c) $-3 < -\frac{22}{7}$

28. Indique si cada una de las proposiciones siguientes es verdadera o falsa.

(a) $-5 > -\sqrt{26}$ (b) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$ (c) $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

29. Suponga que $a > 0, b > 0$. Demuestre cada proposición. *Sugerencia:* cada parte requiere de dos demostraciones: una para $\Rightarrow$ y otra para $\Leftarrow$.

(a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (b) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

30. Si $a \leq b$, ¿cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas?

(a) $a^2 \leq ab$ (b) $a - 3 \leq b - 3$

(c) $a^3 \leq a^2b$ (d) $-a \leq -b$

31. Encuentre todos los valores de x que satisfagan, de manera simultánea, ambas desigualdades.

(a) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < 3$

(b) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 > -4$

(c) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < -4$

32. Encuentre todos los valores de x que satisfacen al menos una de las dos desigualdades.

(a) $2x - 7 > 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(b) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 < 3$

(c) $2x - 7 \leq 1$ o bien $2x + 1 > 3$

33. Resuelva para x, exprese su respuesta en notación de intervalos.

(a) $(x + 1)(x^2 + 2x - 7) \geq x^2 - 1$

(b) $x^4 - 2x^2 \geq 8$

(c) $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 < 0$

34. Resuelva cada desigualdad. Exprese su solución en notación de intervalos.

(a) $1.99 < \frac{1}{x} < 2.01$ (b) $2.99 < \frac{1}{x + 2} < 3.01$

En los problemas del 35 al 44 determine los conjuntos solución de las desigualdades dadas.

35. $|x - 2| \geq 5$ **36.** $|x + 2| < 1$

37. $|4x + 5| \leq 10$ **38.** $|2x - 1| > 2$

39. $\left|\frac{2x}{7} - 5\right| \geq 7$ **40.** $\left|\frac{x}{4} + 1\right| < 1$

41. $|5x - 6| > 1$ **42.** $|2x - 7| > 3$

43. $\left|\frac{1}{x} - 3\right| > 6$ **44.** $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

En los problemas del 45 al 48 resuelva la desigualdad cuadrática por medio de la fórmula cuadrática.

45. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ **46.** $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

47. $3x^2 + 17x - 6 > 0$ **48.** $14x^2 + 11x - 15 \leq 0$

En los problemas 49 al 52 muestre que la implicación indicada es verdadera.

49. $|x - 3| < 0.5 \Rightarrow |5x - 15| < 2.5$

50. $|x + 2| < 0.3 \Rightarrow |4x + 8| < 1.2$

51. $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x - 12| < \varepsilon$

52. $|x + 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 8| < \varepsilon$

En los problemas del 53 al 56 determine δ (dependiente de ε) de modo que la implicación dada sea verdadera.

53. $|x - 5| < \delta \Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon$

54. $|x - 2| < \delta \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon$

55. $|x + 6| < \delta \Rightarrow |6x + 36| < \varepsilon$

56. $|x + 5| < \delta \Rightarrow |5x + 25| < \varepsilon$

57. En un torno, usted desea fabricar un disco (cilindro circular recto delgado) con circunferencia de 10 pulgadas. Esto se realiza midiendo de manera continua el diámetro conforme se hace el disco más pequeño. ¿Qué tan exacto debe medir el diámetro si puede tolerar un error de, a lo sumo, 0.02 pulgadas en la circunferencia?

58. Las temperaturas Fahrenheit y las temperaturas Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Un experimento requiere mantener una solución a 50°C con un error de 3% (o 1.5°), a lo sumo. Usted sólo tiene un termómetro Fahrenheit. ¿Qué error se le permite en el experimento?

En los problemas del 59 al 62 resuelva las desigualdades.

59. $|x - 1| < 2|x - 3|$ **60.** $|2x - 1| \geq |x + 1|$

61. $2|2x - 3| < |x + 10|$ **62.** $|3x - 1| < 2|x + 6|$

63. Demuestre que $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$ dando una razón para cada uno de los siguientes pasos.

$$|x| < |y| \Rightarrow |x||x| \leq |x||y| \quad \text{y} \quad |x||y| < |y||y|$$
$$\Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow x^2 < y^2$$

Recíprocamente,

$$x^2 < y^2 \Rightarrow |x|^2 < |y|^2$$
$$\Rightarrow |x|^2 - |y|^2 < 0$$
$$\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) < 0$$
$$\Rightarrow |x| - |y| < 0$$
$$\Rightarrow |x| < |y|$$

64. Utilice el resultado del problema 63 para demostrar que

$$0 < a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

65. Utilice las propiedades del valor absoluto para demostrar que cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas.

(a) $|a - b| \leq |a| + |b|$ (b) $|a - b| \geq |a| - |b|$

(c) $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

66. Utilice la desigualdad del triángulo y el hecho de que $0 < |a| < |b| \Rightarrow 1/|b| < 1/|a|$, para establecer la siguiente cadena de desigualdades.

$$\left|\frac{1}{x^2 + 3} - \frac{1}{|x| + 2}\right| \leq \frac{1}{x^2 + 3} + \frac{1}{|x| + 2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

67. Demuestre que (véase el problema 66)

$$\left|\frac{x - 2}{x^2 + 9}\right| \leq \frac{|x| + 2}{9}$$

68. Demuestre que

$$|x| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 1}\right| \leq 15$$

69. Demuestre que

$$|x| \leq 1 \Rightarrow |x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}| < 2$$

70. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $x < x^2$ para $x < 0$ o $x > 1$

(b) $x^2 < x$ para $0 < x < 1$

71. Demuestre que $a \neq 0 \Rightarrow a^2 + 1/a^2 \geq 2$. *Sugerencia:* considere $(a - 1/a)^2$.

72. El número $\frac{1}{2}(a + b)$ se le llama promedio, o **media aritmética**, de a y b. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números; es decir, pruebe que

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

73. El número $\sqrt{ab}$ se denomina **media geométrica** de los dos números positivos a y b. Pruebe que

$$0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$$

74. Para dos números positivos a y b, pruebe que

$$\sqrt{ab} \leq \tfrac{1}{2}(a + b)$$

Ésta es la versión más sencilla de una famosa desigualdad llamada **desigualdad de la media geométrica – media aritmética**.

75. Demuestre que, entre todos los rectángulos con un perímetro dado p, el cuadrado tiene la mayor área. *Sugerencia*: si a y b denotan las longitudes de los lados adyacentes de un rectángulo de perímetro p, entonces el área es ab, y para el cuadrado el área es $a^2 = [(a + b)/2]^2$. Ahora vea el problema 74.

76. Resuelva $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} \leq 0$.

77. La fórmula $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ proporciona la resistencia total R en un circuito eléctrico debida a tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, conectadas en paralelo. Si $10 \leq R_1 \leq 20$, $20 \leq R_2 \leq 30$ y $30 \leq R_3 \leq 40$, determine el rango de valores de R.

78. El radio de una esfera mide aproximadamente 10 pulgadas. Determine una tolerancia δ en la medición que asegure un error menor que 0.01 pulgadas cuadradas en el valor calculado del área de la superficie de la esfera.

Respuestas a la revisión de conceptos. **1.** $[-1, 5)$; $(-\infty, -2]$ **2.** $b > 0$; $b < 0$ **3.** (b) and (c) **4.** $-1 \leq x \leq 5$

0.3 El sistema de coordenadas rectangulares

En el plano, produzca dos copias de la recta real, una horizontal y la otra vertical, de modo que se intersecten en los puntos cero de las dos rectas. Las dos rectas se denominan **ejes coordenados**, su intersección se etiqueta con O y se denomina **origen**. Por convención, la recta horizontal se llama **eje *x*** y la recta vertical se llama **eje *y***. La mitad positiva del eje x es hacia la derecha, la mitad positiva del eje y es hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que llevan las marcas I, II, III y IV, como se muestra en la figura 1.

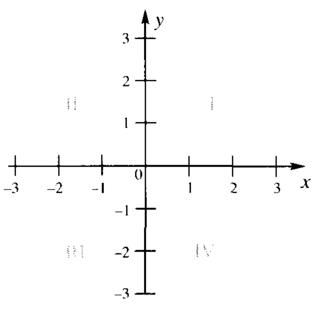


Figura 1

Ahora, cada punto P en el plano puede asignarse a una pareja de números, llamados **coordenadas cartesianas**. Si una línea vertical y otra horizontal que pasan por P intersectan los ejes x y y en a y b, respectivamente, entonces P tiene coordenadas (a, b) (véase la figura 2). Llamamos a (a, b) un **par ordenado** de números debido a que es importante saber cuál número está primero. El primer número, a, es la **coordenada *x*** (o abscisa); el segundo número, b, es la **coordenada *y*** (u ordenada).

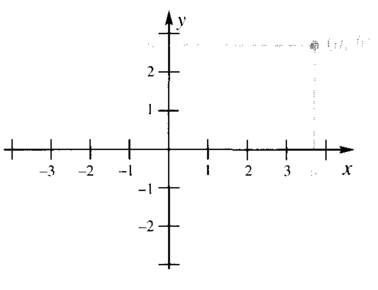


Figura 2

La fórmula de la distancia

Con coordenadas a la mano, podemos introducir una fórmula sencilla para la distancia entre cualesquiera dos puntos en el plano. Tiene como base el **Teorema de Pitágoras**, el cual dice que si a y b son las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de su hipotenusa (véase la figura 3), entonces

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Recíprocamente, la relación entre los tres lados de un triángulo se cumple sólo para un triángulo rectángulo.

Ahora considérese cualesquiera dos puntos P y Q, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Junto con R, el punto de coordenadas (x_2, y_1), P y Q son los vértices de un triángulo rectángulo (véase la figura 4). Las longitudes de PR y RQ son $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$, respectivamente. Cuando aplicamos el Teorema de Pitágoras y tomamos la raíz cuadrada principal de ambos lados, obtenemos la expresión siguiente para la **fórmula de la distancia**

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

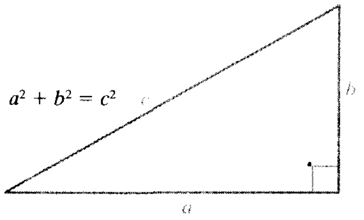


Figura 3

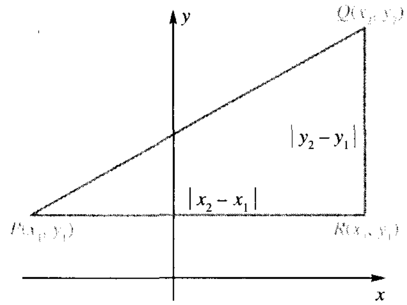


Figura 4

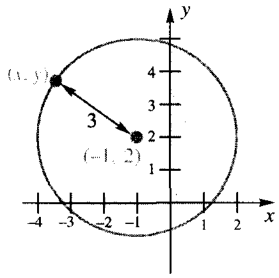


Figura 5

EJEMPLO 1 Encuentre la distancia entre

(a) $P(-2, 3)$ y $Q(4, -1)$ (b) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $Q(\pi, \pi)$

SOLUCIÓN

(a) $d(P, Q) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21$

(b) $d(P, Q) = \sqrt{(\pi - \sqrt{2})^2 + (\pi - \sqrt{3})^2} \approx \sqrt{4.971} \approx 2.23$ ■

La fórmula es válida incluso si los dos puntos pertenecen a la misma recta horizontal o a la misma recta vertical. Así, la distancia entre $P(-2, 2)$ y $Q(6, 2)$ es

$$\sqrt{(6-(-2))^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{64} = 8$$

La ecuación de una circunferencia Es un paso pequeño ir de la fórmula de la distancia a la ecuación de una circunferencia. Una **circunferencia** es el conjunto de puntos que están a una distancia fija (el *radio*) de un punto fijo (el *centro*). Por ejemplo, considere la circunferencia de radio 3 con centro en $(-1, 2)$ (véase la figura 5). Sea (x, y) un punto cualquiera de esta circunferencia. Por medio de la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = 3$$

Cuando elevamos al cuadrado ambos lados obtenemos

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

que llamamos la ecuación de esta circunferencia.

En forma más general, la circunferencia de radio r y centro (h, k) tiene la ecuación

$$(1) \qquad \boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

A esto le llamamos **ecuación estándar de una circunferencia.**

EJEMPLO 2 Determine la ecuación estándar de una circunferencia de radio 5 y centro en $(1, -5)$. También, encuentre las ordenadas de los dos puntos en esta circunferencia con abscisa 2.

SOLUCIÓN La ecuación buscada es

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

Para realizar la segunda tarea, sustituimos $x = 2$ en la ecuación y despejamos la y.

$$\begin{aligned}(2 - 1)^2 + (y + 5)^2 &= 25\\ (y + 5)^2 &= 24\\ y + 5 &= \pm\sqrt{24}\\ y &= -5 \pm \sqrt{24} = -5 \pm 2\sqrt{6}\end{aligned}$$ ■

Si desarrollamos los dos cuadrados en el recuadro (1) y reducimos las constantes, entonces la ecuación adquiere la forma

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

Esto sugiere la pregunta de si toda ecuación de la última forma es la ecuación de una circunferencia. La respuesta es sí, con algunas excepciones obvias.

Circunferencia ↔ Ecuación
Decir que $$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$ es la ecuación de la circunferencia de radio 3 con centro $(-1, 2)$ significa dos cosas: 1. Si un punto está en esta circunferencia, entonces sus coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación. 2. Si x y y son números que satisfacen la ecuación, entonces son las coordenadas de un punto en la circunferencia.

EJEMPLO 3 Demuestre que la ecuación

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

representa una circunferencia, y determine su centro y su radio.

SOLUCIÓN Necesitamos *completar el cuadrado*, un importante proceso en muchos contextos. Para completar el cuadrado de $x^2 \pm bx$, sumamos $(b/2)^2$. Así, sumamos $(-2/2)^2 = 1$ a $x^2 - 2x$ y $(6/2)^2 = 9$ a $y^2 + 6y$, y por supuesto debemos añadir los mismos números al lado derecho de la ecuación, para obtener

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = -6 + 1 + 9$$
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

La última ecuación está en la forma estándar. Es la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, -3)$ y radio 2. Si, como resultado de este proceso, obtuviésemos un número negativo en el lado derecho de la ecuación final, la ecuación no representaría curva alguna. Si obtuviésemos cero, la ecuación representaría un solo punto $(1, -3)$. ■

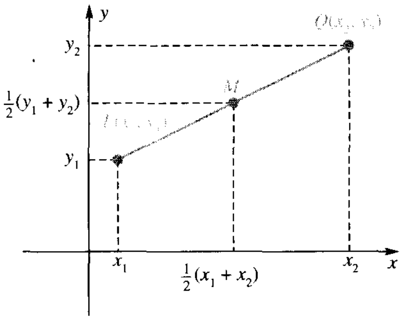


Figura 6

La fórmula del punto medio Considere dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ con $x_1 \le x_2$ y $y_1 \le y_2$, como en la figura 6. La distancia entre x_1 y x_2 es $x_2 - x_1$. Cuando le sumamos la mitad de esta distancia, $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, a x_1, obtenemos el punto medio entre x_1 y x_2.

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por lo tanto, el punto $(x_1 + x_2)/2$ es el punto medio entre x_1 y x_2 sobre el eje x y, en consecuencia, el punto medio M del segmento PQ tiene a $(x_1 + x_2)/2$ como su coordenada x. De manera análoga, podemos mostrar que $(y_1 + y_2)/2$ es la coordenada y de M. Así, tenemos la **fórmula del punto medio**

> El punto medio del segmento de recta que une $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es
> $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

EJEMPLO 4 Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como un diámetro el segmento que va de $(1, 3)$ a $(7, 11)$.

SOLUCIÓN El centro de la circunferencia está en el punto medio del diámetro; por lo tanto, el centro tiene coordenadas $(1 + 7)/2 = 4$ y $(3 + 11)/2 = 7$. La longitud del diámetro, obtenida por medio de la fórmula de distancia, es

$$\sqrt{(7 - 1)^2 + (11 - 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

de modo que el radio de la circunferencia es 5. La ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$$ ■

Rectas Considere la recta de la figura 7. Del punto A al punto B existe una **elevación** (cambio vertical) de 2 unidades y un **avance** (cambio horizontal) de 5 unidades. Decimos que la recta tiene una pendiente de 2/5. En general (véase la figura 8), para una recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, en donde $x_1 \neq x_2$, definimos la **pendiente** m de esa recta como

$$\boxed{m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

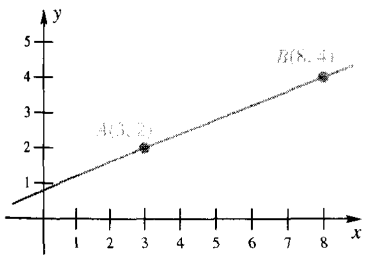


Figura 7

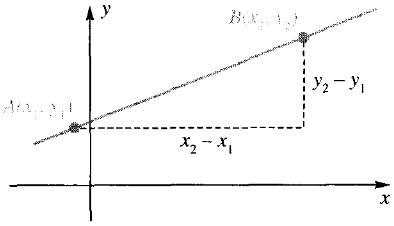


Figura 8

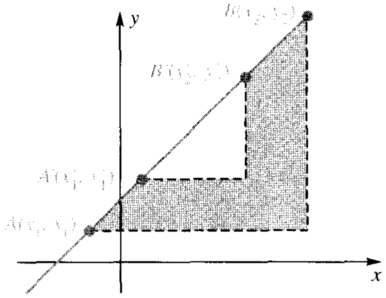


Figura 9

¿El valor que obtuvimos para la pendiente depende de la pareja de puntos que utilicemos para A y B? Los triángulos semejantes en la figura 9 nos muestran que

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Así, los puntos A' y B' darían lo mismo que A y B. Incluso, no importa si A está a la izquierda o a la derecha de B, ya que

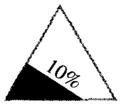
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Todo lo que importa es que restemos las coordenadas en el mismo orden en el numerador y el denominador.

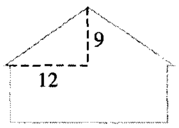
La pendiente m es una medida de la inclinación de una recta, como se ilustra en la figura 10. Observe que una recta horizontal tiene pendiente cero, una recta que se eleva hacia la derecha tiene pendiente positiva y una recta que desciende a la derecha tiene pendiente negativa. Mientras mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más inclinada será la recta. El concepto de pendiente de una recta vertical no tiene sentido, ya que implicaría la división entre cero. Por lo tanto, la pendiente para una recta vertical se deja indefinida.

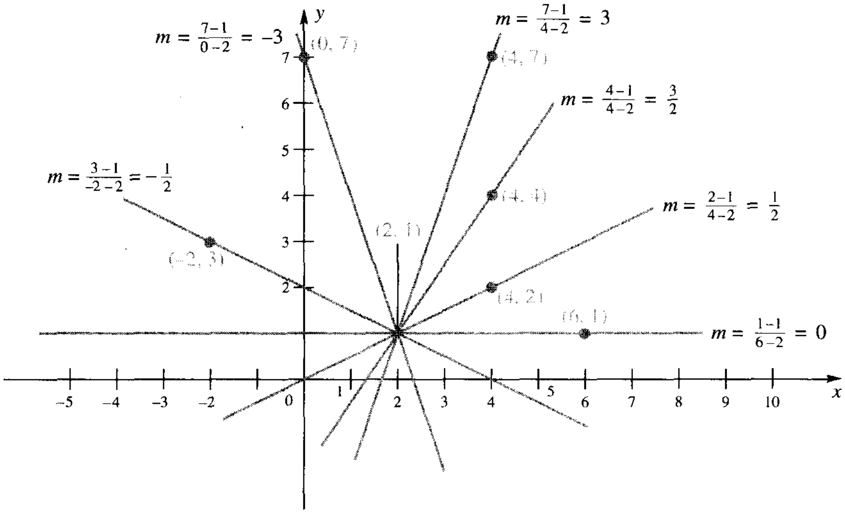
Grado (nivel) e inclinación

El símbolo internacional para la pendiente de un camino (llamado grado) se muestra abajo. El grado está dado como porcentaje. Un grado de 10% corresponde a una pendiente de ±0.10.



Los carpinteros utilizan el término *inclinación*. Una inclinación de 9:12 corresponde a una pendiente de $\frac{9}{12}$.





Rectas con pendientes diferentes

Figura 10

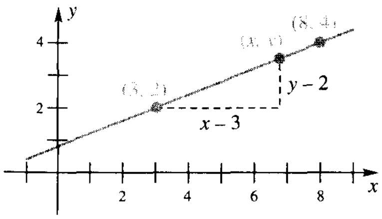


Figura 11

La forma punto-pendiente Otra vez, considere la recta de nuestro estudio inicial; se reproduce en la figura 11. Sabemos que esta recta

1. pasa por $(3, 2)$ y
2. tiene pendiente $\frac{2}{5}$.

Tome cualquier otro punto de esta recta, como el que tiene coordenadas (x, y). Si utilizamos este punto y el punto $(3, 2)$ para medir la pendiente, debemos obtener $\frac{2}{5}$, es decir,

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{2}{5}$$

o, después de multiplicar por $x - 3$,

$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Observe que a esta última ecuación la satisfacen todos los puntos de la recta, incluso (3, 2). Además, ningún punto que no pertenezca a la recta puede satisfacer esta ecuación.

Lo que acabamos de hacer en un ejemplo lo podemos hacer en general. La recta que pasa por el punto (fijo) (x_1, y_1) con pendiente m tiene ecuación

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

A esta forma le llamamos **punto–pendiente** de la ecuación de una recta.

Una vez más considere la recta de nuestro ejemplo. Esa recta pasa por $(8, 4)$, así como por $(3, 2)$. Si utilizamos $(8, 4)$ como (x_1, y_1), obtenemos la ecuación

$$y - 4 = \tfrac{2}{5}(x - 8)$$

la cual parece muy diferente de $y - 2 = \frac{2}{5}(x - 3)$. Sin embargo, ambas pueden simplificarse a $5y - 2x = 4$; son equivalentes.

EJEMPLO 5 Determine una ecuación de la recta que pasa por $(-4, 2)$ y $(6, -1)$.

SOLUCIÓN La pendiente es $m = (-1 - 2)/(6 + 4) = -\frac{3}{10}$. Por lo tanto, usando $(-4, 2)$ como el punto fijo obtenemos la ecuación

$$y - 2 = -\tfrac{3}{10}(x + 4)$$ ■

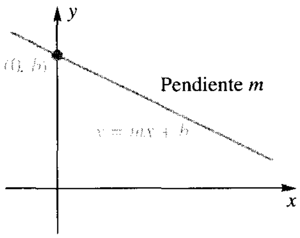


Figura 12

La forma pendiente intersección La ecuación de una recta puede expresarse de varias formas. Suponga que se nos ha dado la pendiente m de la recta y la intersección b con el eje y —es decir, la recta intersecta al eje y en $(0, b)$—, como se muestra en la figura 12. Al seleccionar $(0, b)$ como (x_1, y_1) y al aplicar la forma punto–pendiente, obtenemos

$$y - b = m(x - 0)$$

que puede reescribirse como

$$\boxed{y = mx + b}$$

La última se denomina forma **pendiente intersección**. En todo momento que veamos una ecuación escrita en esta forma, la reconocemos como una recta y de manera inmediata leemos su pendiente y su intersección con el eje y. Por ejemplo, considere la ecuación

$$3x - 2y + 4 = 0$$

Si despejamos la y, obtenemos

$$y = \tfrac{3}{2}x + 2$$

Ésta es la ecuación de una recta con pendiente $\frac{3}{2}$ e intersección con el eje y igual a 2.

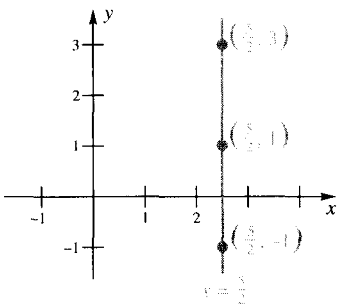


Figura 13

Ecuación de una recta vertical Las rectas verticales no caen dentro del estudio precedente, ya que el concepto de pendiente no está definido para ellas; aunque tienen ecuaciones muy sencillas. La recta en la figura 13 tiene ecuación $x = \frac{5}{2}$, ya que un punto está en la recta si y sólo si satisface esta ecuación. La ecuación de cualquier recta vertical puede escribirse en la forma $x = k$, donde k es una constante. Debe notarse que la ecuación de una recta horizontal puede escribirse en la forma $y = k$.

La forma $Ax + By + C = 0$ Sería bueno tener una forma que cubra todos los casos, incluyendo las rectas verticales. Por ejemplo, considere,

Resumen: ecuaciones de rectas
Recta vertical: $x = k$ Recta horizontal: $y = \mathrm{k}$ Forma punto–pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$ Forma pendiente intercepción: $y = mx + b$ Ecuación lineal general: $Ax + By + C = 0$

$$y - 2 = -4(x + 2)$$

$$y = 5x - 3$$

$$x = 5$$

Éstas pueden reescribirse (pasando todo al lado izquierdo) como sigue:

$$4x + y + 6 = 0$$
$$-5x + y + 3 = 0$$
$$x + 0y - 5 = 0$$

Todas tienen la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \qquad A \text{ y } B \text{ no son cero al mismo tiempo}}$$

que llamamos la **ecuación lineal general** (o ecuación general de la recta). Sólo se requiere un poco de reflexión para ver que la ecuación de cualquier recta puede escribirse en esta forma. Recíprocamente, la gráfica de la ecuación lineal general siempre es una recta.

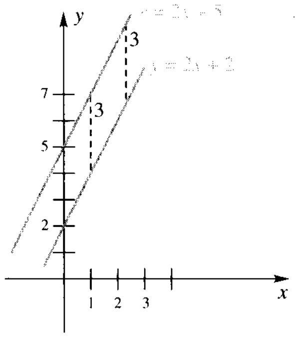


Figura 14

Rectas paralelas Se dice que dos rectas son paralelas cuando no tienen puntos en común. Por ejemplo, las rectas cuyas ecuaciones son $y = 2x + 2$ y $y = 2x + 5$ son paralelas porque, para todo valor de x, la segunda recta está tres unidades por arriba de la primera (véase la figura 14). De manera análoga, las rectas con ecuaciones $-2x + 3y + 12 = 0$ y $4x - 6y = 5$ son paralelas. Para ver esto, de cada ecuación despéjese y (*i.e., es decir*, escriba cada una en la forma pendiente intersección. Esto da $y = \frac{2}{3}x - 4$ y $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$, respectivamente. Otra vez, como las pendientes son iguales, una recta estará un número fijo de unidades por arriba o por debajo de la otra, de modo que las rectas nunca se intersectarán. Si dos rectas tienen la misma pendiente y la misma intersección y, entonces las dos rectas son la misma y no son paralelas.

Resumimos estableciendo que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente y diferentes intersecciones con el eje y. Dos rectas verticales son paralelas si y sólo si son rectas distintas.

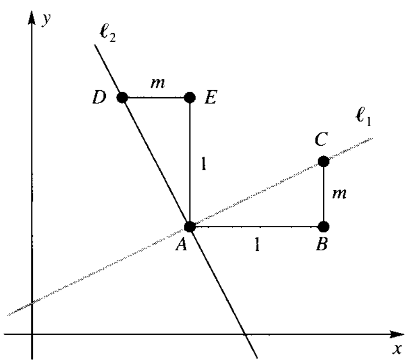


Figura 15

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(6, 8)$ y es paralela a la recta con ecuación $3x - 5y = 11$.

SOLUCIÓN Cuando despejamos la y de $3x - 5y = 11$, obtenemos $y = \frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$, de la cual leemos que la pendiente de la recta es $\frac{3}{5}$. La ecuación de la recta deseada es

$$y - 8 = \tfrac{3}{5}(x - 6)$$

o, de manera equivalente, $y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{5}$. Sabemos que estas rectas son distintas porque las intersecciones con el eje y son diferentes. ■

Rectas perpendiculares ¿Existe alguna condición sencilla que caracterice a las rectas perpendiculares? Sí; *dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas, una respecto de la otra.* Para ver por qué esto es verdadero, considere la figura 15. Ésta cuenta casi toda la historia; se deja como ejercicio (problema 57) construir una demostración geométrica de que dos rectas (no verticales) son perpendiculares si y sólo si $m_2 = -1/m_1$.

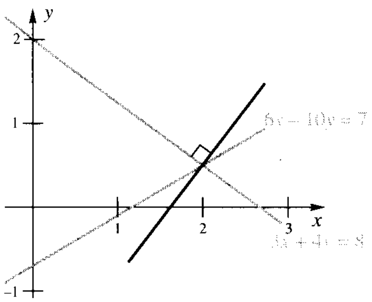


Figura 16

EJEMPLO 7 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas con ecuaciones $3x + 4y = 8$ y $6x - 10y = 7$ y que es perpendicular a la primera de estas rectas (véase la figura 16).

SOLUCIÓN Para encontrar el punto de intersección de las dos rectas, multiplicamos la primera ecuación por -2 y la sumamos a la segunda ecuación

$$\begin{array}{r} -6x - 8y = -16 \\ 6x - 10y = 7 \\ \hline -18y = -9 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Al sustituir $y = \frac{1}{2}$ en cualesquiera de las ecuaciones originales se obtiene $x = 2$. El punto de intersección es $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Cuando despejamos la y de la primera ecuación (para ponerla en la forma pendiente intersección), obtenemos $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Una recta perpendicular a ellas tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La ecuación de la recta requerida es

$$y - \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3}(x - 2)$$

■

Revisión de conceptos

1. La distancia entre los puntos $(-2, 3)$ y (x, y) es ________.

2. La ecuación de la circunferencia de radio 5 y centro en $(-4, 2)$ es ________.

3. El punto medio del segmento de recta que une a $(-2, 3)$ y $(5, 7)$ es ________.

4. La recta que pasa por (a, b) y (c, d) tiene pendiente $m =$ ________, siempre que $a \neq c$.

Conjunto de problemas 0.3

En los problemas del 1 al 4 grafique los puntos dados en el plano coordenado y luego determine la distancia entre ellos.

1. $(3, 1), (1, 1)$

2. $(-3, 5), (2, -2)$

3. $(4, 5), (5, -8)$

4. $(-1, 5), (6, 3)$

5. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(5, 3), (-2, 4)$ y $(10, 8)$ es isósceles.

6. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son $(2, -4), (4, 0)$ y $(8, -2)$ es un triángulo rectángulo.

7. Los puntos $(3, -1)$ y $(3, 3)$ son dos vértices de un cuadrado. Proporcione otros tres pares de posibles vértices.

8. Encuentre el punto en el eje x que sea equidistante de $(3, 1)$ y $(6, 4)$.

9. Determine la distancia entre $(-2, 3)$ y el punto medio del segmento de recta que une a $(-2, -2)$ y $(4, 3)$.

10. Determine la longitud del segmento de recta que une los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A = (1, 3)$, $B = (2, 6)$, $C = (4, 7)$ y $D = (3, 4)$.

En los problemas del 11 al 16 determine la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

11. Centro en $(1, 1)$, radio 1.

12. Centro en $(-2, 3)$, radio 4.

13. Centro en $(2, -1)$ y que pasa por $(5, 3)$.

14. Centro en $(4, 3)$ y que pasa por $(6, 2)$.

15. Diámetro AB, donde $A = (1, 3)$ y $B = (3, 7)$.

16. Centro en $(3, 4)$ y tangente al eje x.

En los problemas del 17 al 22 determine el centro y el radio de la circunferencia con la ecuación dada.

17. $x^2 + 2x + 10 + y^2 - 6y - 10 = 0$

18. $x^2 + y^2 - 6y = 16$

19. $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$

20. $x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$

21. $4x^2 + 16x + 15 + 4y^2 + 6y = 0$

22. $x^2 + 16x + \frac{105}{16} + 4y^2 + 3y = 0$

En los problemas del 23 al 28, determine la pendiente de la recta que contiene los dos puntos dados.

23. $(1, 1)$ y $(2, 2)$

24. $(3, 5)$ y $(4, 7)$

25. $(2, 3)$ y $(-5, -6)$

26. $(2, -4)$ y $(0, -6)$

27. $(3, 0)$ y $(0, 5)$

28. $(-6, 0)$ y $(0, 6)$

En los problemas del 29 al 34 determine una ecuación para cada recta. Luego escriba su respuesta en la forma $Ax + By + C = 0$.

29. Pasa por $(2, 2)$ con pendiente -1

30. Pasa por $(3, 4)$ con pendiente -1

31. Con intercepción y igual a 3 y pendiente 2

32. Con intercepción y igual a 5 y pendiente 0

33. Pasa por $(2, 3)$ y $(4, 8)$

34. Pasa por $(4, 1)$ y $(8, 2)$

En los problemas del 35 al 38 determine la pendiente y la intercepción con el eje y de cada recta.

35. $3y = -2x + 1$

36. $-4y = 5x - 6$

37. $6 - 2y = 10x - 2$ **38.** $4x + 5y = -20$

39. Escriba una ecuación para la recta que pasa por $(3,-3)$ y que es

(a) paralela a la recta $y = 2x + 5$;

(b) perpendicular a la recta $y = 2x + 5$;

(c) paralela a la recta $2x + 3y = 6$;

(d) perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$;

(e) paralela a la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, -1)$;

(f) paralela a la recta $x = 8$;

(g) perpendicular a la recta $x = 8$.

40. Determine el valor de c para el cual la recta $3x + cy = 5$

(a) pasa por el punto $(3, 1)$;

(b) es paralela al eje y;

(c) es paralela a la recta $2x + y = -1$;

(d) tiene intersecciones con el eje x y con el eje y iguales;

(e) es perpendicular a la recta $y - 2 = 3(x + 3)$.

41. Escriba la ecuación para la recta que pasa por $(-2, -1)$ y que es perpendicular a la recta $y + 3 = -\frac{2}{3}(x - 5)$.

42. Determine el valor de k, tal que la recta $kx - 3y = 10$

(a) es paralela a la recta $y = 2x + 4$;

(b) es perpendicular a la recta $y = 2x + 4$;

(c) es perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$.

43. ¿El punto $(3, 9)$ está por arriba o por debajo de la recta $y = 3x - 1$?

44. Demuestre que la ecuación de la recta con intersección con el eje x igual a $a \neq 0$ e intersección con el eje y igual a $b \neq 0$ puede escribirse como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

En los problemas del 45 al 48 determine las coordenadas del punto de intersección. Después escriba una ecuación para la recta que pasa por ese punto y que es perpendicular a la primera de las rectas dadas.

45. $2x + 3y = 4$, $-3x + y = 5$ **46.** $4x - 5y = 8$, $2x + y = -10$

47. $3x - 4y = 5$, $2x + 3y = 9$ **48.** $5x - 2y = 5$, $2x + 3y = 6$

49. Los puntos $(2, 3)$, $(6, 3)$, $(6, -1)$ y $(2, -1)$ son vértices de un cuadrado. Determine las ecuaciones de la circunferencia inscrita y de la circunferencia circunscrita.

≈ **50.** Un banda se ajusta estrechamente alrededor de dos circunferencias, con ecuaciones $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ y $(x + 9)^2 + (y - 10)^2 = 16$. ¿Cuál es la longitud de dicha banda?

51. Demuestre que el punto medio de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

52. Encuentre una ecuación de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(8, 0)$ y $(0, 6)$.

53. Demuestre que las dos circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ y $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ no se intersectan. *Sugerencia:* Determine la distancia entre los dos centros.

54. ¿Qué relación deben cumplir a, b y c, si $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ es la ecuación de una circunferencia?

55. El techo de un ático forma un ángulo de 30° con el piso. Un tubo de 2 pulgadas de radio se coloca a lo largo del borde del ático, de tal manera que un lado del tubo toca el techo y el otro lado toca el piso (véase la figura 17). ¿Cuál es la distancia d desde el borde del ático hasta donde el tubo toca el piso?

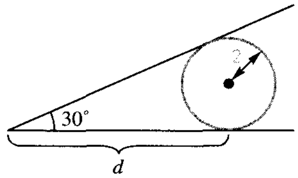


Figura 17

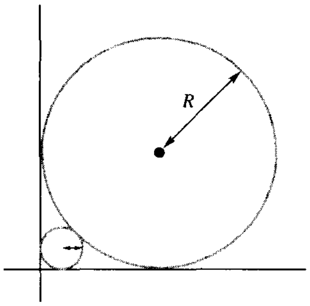


Figura 18

56. Una circunferencia de radio R se coloca en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 18. ¿Cuál es el radio r de la circunferencia más grande que puede colocarse entre la primera circunferencia y el origen?

57. Construya una demostración geométrica, con base en la figura 15, que pruebe que dos rectas son perpendiculares sí y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas una de la otra.

58. Demuestre que el conjunto de puntos que están al doble de distancia de $(3, 4)$ que de $(1, 1)$ forman una circunferencia. Determine su centro y radio.

59. El Teorema de Pitágoras dice que las áreas A, B y C de los cuadrados en la figura 19 satisfacen $A + B = C$. Demuestre que los semicírculos y los triángulos equiláteros satisfacen la misma relación y luego sugiera un teorema general de estos hechos.

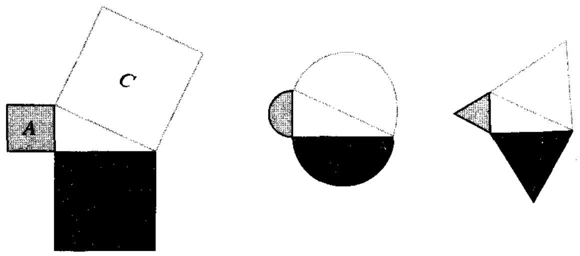


Figura 19

60. Considere una circunferencia C y un punto P exterior a ella. Sea PT el segmento de recta tangente a C en T, y suponga que la recta que pasa por P y por el centro de C intersecta a C en M y en N. Demuestre que $(PM)(PN) = (PT)^2$.

≈ **61.** Una banda se ajusta alrededor de las tres circunferencias $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 8)^2 + y^2 = 4$ y $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 4$, como se muestra en la figura 20. Determine la longitud de esta banda.

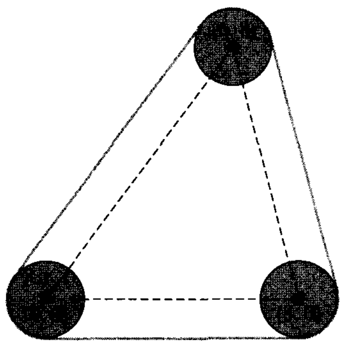


Figura 20

62. Estudie los problemas 50 y 61. Considere un conjunto de circunferencias de radio r que no se intersectan, cuyos centros son los vértices de un polígono convexo de n lados con longitudes $d_1, d_2, \ldots, d_n$. ¿Cuál es la longitud de la banda que se ajusta alrededor de estas circunferencias (de la misma forma que se muestra en la figura 20)?

Puede demostrarse que la distancia d del punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Utilice este resultado para determinar la distancia desde el punto dado hasta la recta dada.

63. $(-3, 2); 3x + 4y = 6$

64. $(4, -1); 2x - 2y + 4 = 0$

65. $(-2, -1); 5y = 12x + 1$

66. $(3, -1); y = 2x - 5$

En los problemas 67 y 68 determine la distancia (perpendicular) entre las rectas paralelas dadas. Sugerencia: primero encuentre un punto sobre una de las rectas.

67. $2x + 4y = 7, 2x + 4y = 5$

68. $7x - 5y = 6, 7x - 5y = -1$

69. Determine la ecuación para la recta que biseca al segmento de recta que va de $(-2, 3)$ a $(1, -2)$ y que forma ángulos rectos con este segmento de recta.

70. El centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo se encuentra en los bisectores perpendiculares (mediatrices) de los lados. Utilice este hecho para encontrar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo con vértices $(0, 4), (2, 0)$ y $(4, 6)$.

71. Determine el radio de la circunferencia que está inscrita en un triángulo con lados de longitudes 3, 4 y 5 (véase la figura 21).

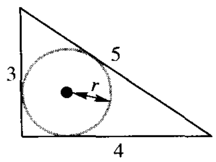


Figura 21

72. Suponga que (a, b) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Demuestre que la recta $ax + by = r^2$ es tangente a la circunferencia en (a, b).

73. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 0)$. *Sugerencia:* véase el problema 72.

74. Exprese la distancia perpendicular entre las rectas paralelas $y = mx + b$ y $y = mx + B$, en términos de m, b y B. *Sugerencia:* la distancia pedida es la misma que aquella entre $y = mx$ y $y = mx + B - b$.

75. Demuestre que la recta que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado. Sugerencia: puede suponer que el triángulo tiene vértices en $(0, 0), (a, 0)$ y (b, c).

76. Demuestre que los segmentos de recta que unen a los puntos medios de lados adyacentes de cualquier cuadrilátero (polígono con cuatro lados) forman un paralelogramo.

$\boxed{\approx}$ **77.** Una rueda cuyo borde tiene ecuación $x^2 + (y - 6)^2 = 25$ gira rápidamente en dirección contraria a las manecillas del reloj. Una partícula de lodo, en el borde, sale despedida en el punto $(3, 2)$ y vuela hacia la pared en $x = 11$. ¿Aproximadamente a qué altura pegará en la pared? *Sugerencia:* la partícula de lodo vuela de forma tangente tan rápido que los efectos de la gravedad son despreciables durante el tiempo que le toma golpear la pared.

Respuestas a la revisión de conceptos:
1. $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$ **2.** $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$
3. $(1.5, 5)$ **4.** $(d - b)/(c - a)$

0.4 Gráficas de ecuaciones

El uso de coordenadas para puntos en el plano nos permite describir curvas (un objeto geométrico) por medio de una ecuación (un objeto algebraico). En las secciones anteriores vimos cómo esto se hizo para circunferencias y rectas. Ahora queremos considerar el proceso inverso: graficar una ecuación. La **gráfica de una ecuación** en x y y consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación; es decir, hacen verdadera la igualdad.

Procedimiento para graficar Para graficar una ecuación, por ejemplo, $y = 2x^3 - x + 19$, manualmente, podemos seguir un procedimiento sencillo de tres pasos:

Paso 1: Obtener las coordenadas de algunos puntos que satisfagan la ecuación.

Paso 2: Graficar estos puntos en el plano.

Paso 3: Conectar los puntos con una curva suave.

Este método simplista tendrá que ser suficiente hasta el capítulo 3, cuando utilizaremos métodos más avanzados para graficar ecuaciones. La mejor forma de hacer el paso 1 es construir una tabla de valores. Asignar valores a una de las variables, tal como x, y determinar los valores correspondientes de la otra variable, creando una lista, en forma tabular, de los resultados.

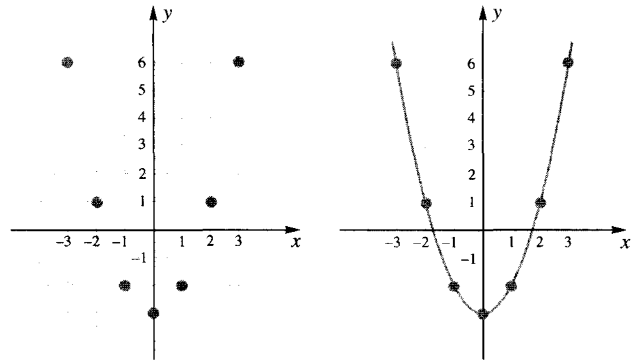
Una calculadora gráfica o un sistema de álgebra por computadora (CAS, del inglés computer algebra sistem) seguirán un procedimiento muy similar, aunque su proceso es transparente para el usuario. Un usuario sólo define la función y pide a la calculadora gráfica, o a la computadora, que la grafique.

EJEMPLO 1 Haga la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$.

SOLUCIÓN El procedimiento de tres pasos se muestra en la figura 1.

$y = x^2 - 3$

x	y
−3	6
−2	1
−1	−2
0	−3
1	−2
2	1
3	6



Paso 1
Construya una tabla de valores

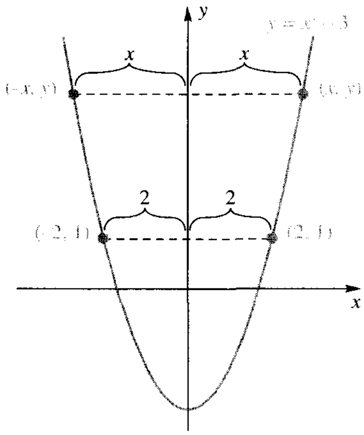
Paso 2
Trace esos puntos

Paso 3
Conecte esos puntos por medio de una curva suave

Figura 1

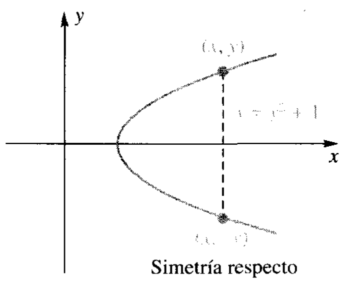
■

Por supuesto, usted necesita un poco de sentido común y hasta un poco de fe. Cuando obtenga puntos que parecen fuera de lugar, verifique sus cálculos. Cuando conecte los puntos que ha trazado por medio de una curva suave, estará suponiendo que la curva se comporta de manera regular entre puntos consecutivos, lo cual es un acto de fe. Por esto, usted debe graficar suficientes puntos de modo que el esbozo de la curva parezca ser claro; entre más puntos grafique, menos fe necesitará. También, debe reconocer que rara vez muestra la curva completa. En nuestro ejemplo, la curva tiene ramas infinitamente largas que se amplían cada vez más. Pero nuestra gráfica muestra las características esenciales. Ésta es nuestra meta al graficar. Mostrar lo suficiente de la gráfica de modo que las características esenciales sean visibles. Más adelante (sección 3.5) usaremos las herramientas del cálculo para refinar y mejorar nuestra comprensión de las gráficas.



Simetría respecto al eje y

Figura 2



Simetría respecto al eje x

Figura 3

Simetría de una gráfica Algunas veces podemos reducir a la mitad el trabajo de graficar, si reconocemos ciertas simetrías de la gráfica reveladas por su ecuación. Observe la gráfica de $y = x^2 - 3$, dibujada anteriormente y otra vez en la figura 2. Si el plano coordenado se doblase a lo largo del eje y, las dos ramas de la gráfica coincidirían. Por ejemplo, (3, 6) coincidiría con (−3, 6); (2, 1) coincidiría con (−2, 1); y de una manera más general, (x, y) coincidiría con $(-x, y)$. De forma algebraica, esto corresponde al hecho de que reemplazar x por $-x$ en la ecuación $y = x^2 - 3$ resulta en una ecuación equivalente.

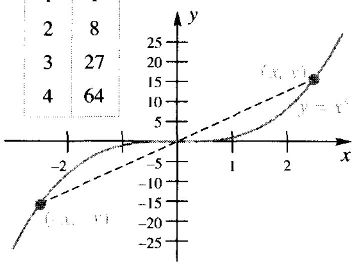
Considere una gráfica arbitraria. Es simétrica respecto al eje y si siempre que (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica (véase la figura 2). De forma análoga, es simétrica respecto al eje x si siempre que (x, y) está en la gráfica, $(x, -y)$ también está en la gráfica (véase la figura 3). Por último, una gráfica es simétrica respecto al origen si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también está en la gráfica (véase el ejemplo 2).

En términos de ecuaciones, tenemos tres pruebas sencillas. La gráfica de una ecuación es

1. simétrica respecto al eje y, si al reemplazar x por $-x$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $y = x^2$);
2. simétrica respecto al eje x, si al reemplazar y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente (por ejemplo, $x = y^2 + 1$);
3. simétrica respecto al origen, si al reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente [$y = x^3$ es un buen ejemplo ya que $-y = (-x)^3$ es equivalente a $y = x^3$].

$y = x^3$

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64



Simetría respecto al origen

Figura 4

EJEMPLO 2 Haga un bosquejo de la gráfica de $y = x^3$.

SOLUCIÓN Notemos, como se señaló anteriormente, que la gráfica será simétrica con respecto al origen, así que sólo necesitamos obtener una tabla de valores para x no negativa; por medio de la simetría podemos determinar puntos que estén apareados. Por ejemplo, que $(2, 8)$ pertenezca a la gráfica nos dice que $(-2, -8)$ está en la gráfica; que $(3, 27)$ esté en la gráfica nos dice que $(-3, -27)$ está en la gráfica, y así sucesivamente. Véase la figura 4. ■

Al graficar $y = x^3$, utilizamos una escala más pequeña en el eje y que en el eje x. Esto hizo posible mostrar una parte mayor de la gráfica (al aplanarse, la gráfica también se distorsionó). Cuando grafique a mano, le sugerimos que antes de colocar las escalas en los dos ejes debe examinar su tabla de valores. Seleccione escalas de modo que todos, o la mayoría de los puntos, puedan graficarse y se conserve su gráfica de tamaño razonable. Con frecuencia, una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (CAS) seleccionan la escala para las y una vez que usted ha elegido las x que se utilizarán. Por lo tanto, la primera elección que usted hace es graficar los valores de x. La mayoría de las calculadoras gráficas y los CAS le permiten pasar por alto el escalamiento automático del eje y. Es posible que en algunos casos usted necesite esta opción.

Intersecciones con los ejes coordenados

Los puntos en donde la gráfica de una ecuación cruza los ejes coordenados tienen un papel importante en muchos problemas. Por ejemplo, considere

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Observe que $y = 0$ cuando $x = -2, 1, 3$. Los números -2, 1 y 3 se denominan **intersecciones con el eje x**. De manera análoga, $y = 6$ cuando $x = 0$, y así, 6 se llama la **intersección con el eje y**.

Calculadoras gráficas
Si usted tiene una calculadora gráfica, utilícela siempre que sea posible para reproducir las gráficas que se muestran en las figuras.

EJEMPLO 3 Determine todas las intersecciones con los ejes coordenados de la gráfica de $y^2 - x + y - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Haciendo $y = 0$ en la ecuación dada, obtenemos $x = -6$, y así, la intersección con el eje x es -6. Haciendo $x = 0$ en la ecuación, encontramos que $y^2 + y - 6 = 0$, o $(y + 3)(y - 2) = 0$; las intersecciones con el eje y son -3 y 2. Una verificación de las simetrías indica que la gráfica no tiene ninguna simetría de los tres tipos estudiados anteriormente. La gráfica se muestra en la figura 5. ■

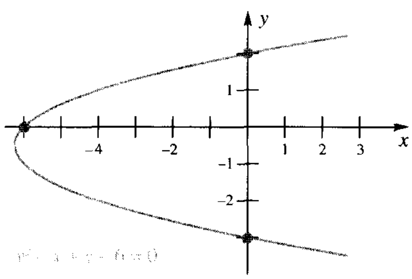


Figura 5

Como las ecuaciones cuadráticas y cúbicas con frecuencia se utilizarán como ejemplos en el trabajo posterior, mostramos sus gráficas comunes en la figura 6.

Las gráficas de las ecuaciones cuadráticas son curvas en forma de copas llamadas **parábolas**. Si una ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, o $x = ay^2 + by + c$, con $a \neq 0$; su gráfica es una parábola. En el primer caso, la gráfica se abre hacia arriba, si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$. En el segundo caso, la gráfica se abre hacia la derecha si $a > 0$ y se abre hacia la izquierda si $a < 0$. Observe que la ecuación del ejemplo 3 puede ponerse en la forma $x = y^2 + y - 6$.

Intersecciones de gráficas

Con frecuencia, necesitamos conocer los puntos de intersección de dos gráficas. Estos puntos se determinan cuando se resuelven, de manera simultánea, las dos ecuaciones para las gráficas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determine los puntos de intersección de la recta $y = -2x + 2$ y la parábola $y = 2x^2 - 4x - 2$, y haga un bosquejo de ambas gráficas en el mismo plano de coordenadas.

SOLUCIÓN Debemos resolver de manera simultánea las dos ecuaciones. Esto es fácil de hacer al sustituir la expresión para y de la primera ecuación en la segunda y al despejar enseguida la x de la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= 2x^2 - 4x - 2 \\ 0 &= 2x^2 - 2x - 4 \\ 0 &= 2(x + 1)(x - 2) \\ x &= -1, \qquad x = 2 \end{aligned}$$

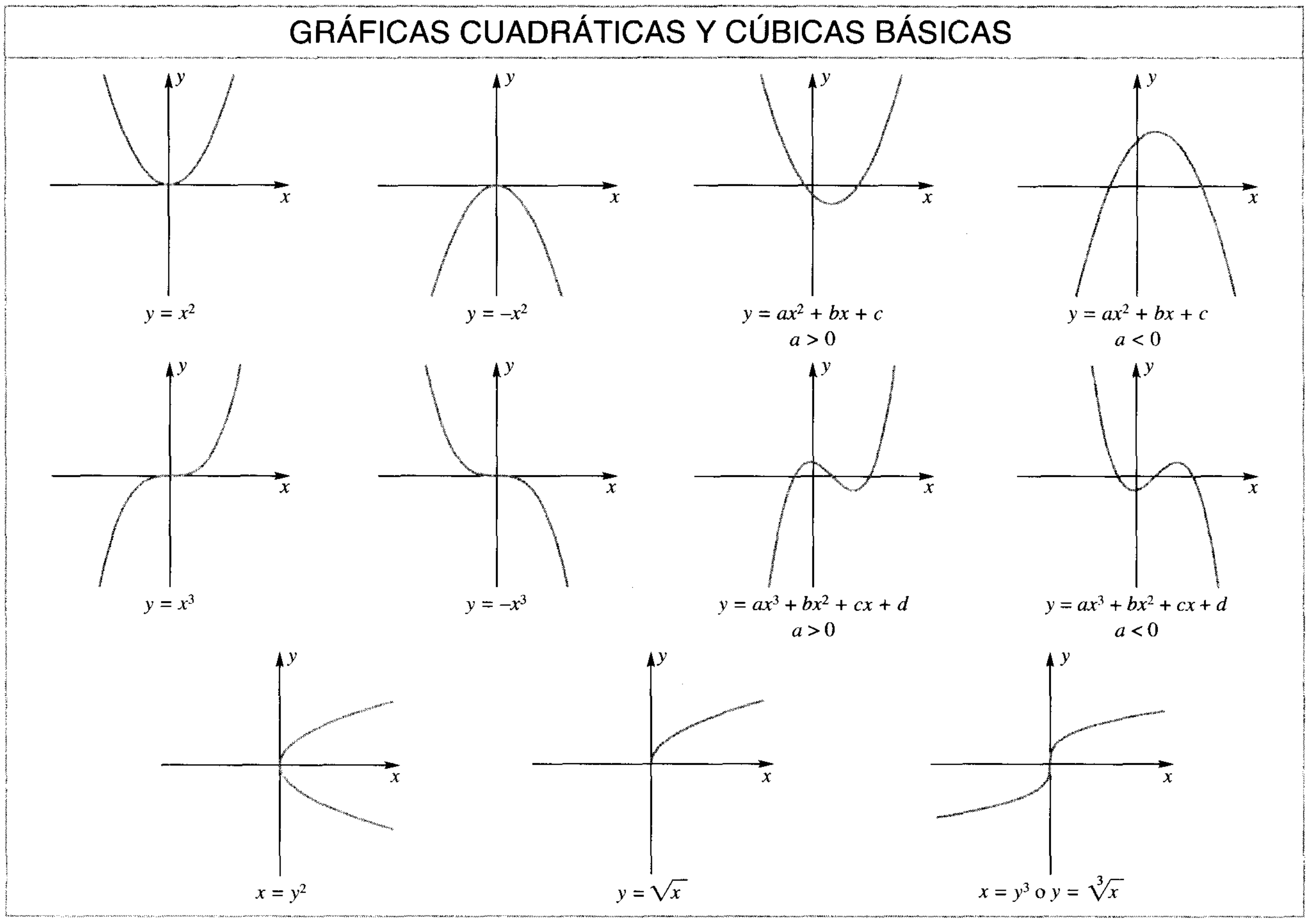


Figura 6

Por medio de sustitución, encontramos que los valores correspondientes de y son 4 y -2; por lo tanto, los puntos de intersección son $(-1, 4)$ y $(2, -2)$. Las dos gráficas se muestran en la figura 7.

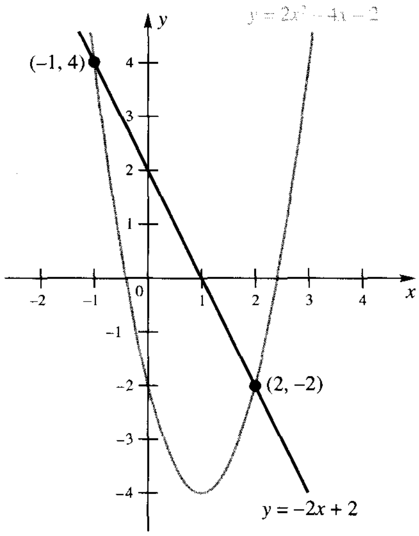


Figura 7

■

Revisión de conceptos

1. Si cada vez que (x, y) está en la gráfica, $(-x, y)$ también está en ella; entonces, la gráfica es simétrica respecto a _______.

2. Si $(-4, 2)$ está en una gráfica que es simétrica respecto al origen, entonces _______ también está en la gráfica.

3. La gráfica de $y = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$ tiene intersección con el eje y _______ e intersecciones con el eje x _______.

4. La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una _______ si $a = 0$ y una _______ si $a \neq 0$.

Conjunto de problemas 0.4

En los problemas del 1 al 30 trace la gráfica de cada ecuación. Comience con la verificación de las simetrías y asegúrese de encontrar todas las intersecciones con el eje x *y el eje* y.

1. $y = -x^2 + 1$

2. $x = -y^2 + 1$

3. $x = -4y^2 - 1$

4. $y = 4x^2 - 1$

5. $x^2 + y = 0$

6. $y = x^2 - 2x$

7. $7x^2 + 3y = 0$

8. $y = 3x^2 - 2x + 2$

9. $x^2 + y^2 = 4$

10. $3x^2 + 4y^2 = 12$

11. $y = -x^2 - 2x + 2$

12. $4x^2 + 3y^2 = 12$

13. $x^2 - y^2 = 4$

14. $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

15. $4(x - 1)^2 + y^2 = 36$

16. $x^2 - 4x + 3y^2 = -2$

17. $x^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **18.** $x^4 + y^4 = 1$

GC **19.** $x^4 + y^4 = 16$

GC **20.** $y = x^3 - x$

GC **21.** $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

GC **22.** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

GC **23.** $2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y = -2$

GC **24.** $4(x - 5)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

GC **25.** $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

GC **26.** $y = x^2(x - 1)(x - 2)$

GC **27.** $y = x^2(x - 1)^2$

GC **28.** $y = x^4(x - 1)^4(x + 1)^4$

GC **29.** $|x| + |y| = 1$

GC **30.** $|x| + |y| = 4$

GC *En los problemas del 31 al 38, en el mismo plano coordenado, trace las gráficas de ambas ecuaciones. Determine y etiquete los puntos de intersección de las dos gráficas (véase el ejemplo 4).*

31. $y = -x + 1$
$y = (x + 1)^2$

32. $y = 2x + 3$
$y = -(x - 1)^2$

33. $y = -2x + 3$
$y = -2(x - 4)^2$

34. $y = -2x + 3$
$y = 3x^2 - 3x + 12$

35. $y = x$
$x^2 + y^2 = 4$

36. $y = x - 1$
$2x^2 + 3y^2 = 12$

37. $y - 3x = 1$
$x^2 + 2x + y^2 = 15$

38. $y = 4x + 3$
$x^2 + y^2 = 81$

39. Seleccione la ecuación que corresponda a cada una de las gráficas en la figura 8.

(a) $y = ax^2$, con $a > 0$

(b) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$

(c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$

(d) $y = ax^3$, con $a > 0$

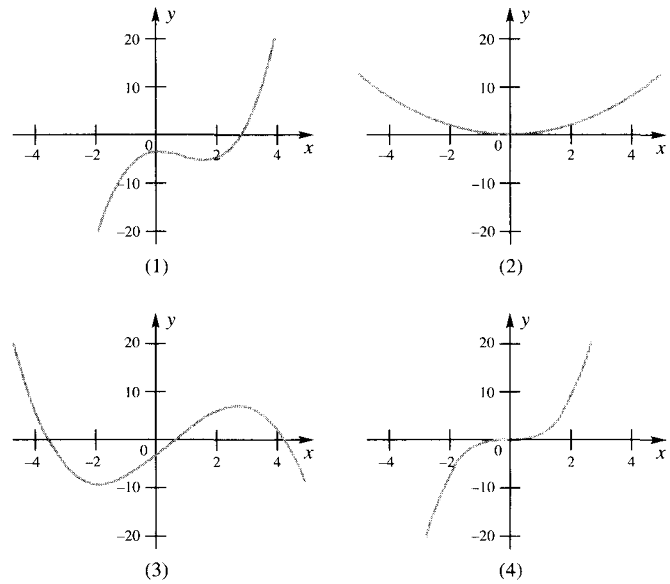


Figura 8

≈ **40.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 13$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

≈ **41.** Determine la distancia entre los puntos en la circunferencia $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 20$ con abscisas -2 y 2. De tales distancias, ¿cuántas existen?

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** el eje y **2.** $(4, -2)$ **3.** 8; $-2, 1, 4$ **4.** recta; parábola

0.5 Funciones y sus gráficas

En todas las matemáticas, el concepto de función es uno de los más básicos y desempeña un papel indispensable en cálculo.

> **Definición**
>
> Una **función** f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado **dominio**— un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función. (Véase la figura 1).

Piense en una función como una máquina que toma como entrada un valor x y produce una salida $f(x)$. (Véase la figura 2). Cada valor de entrada se hace corresponder con un *solo* valor de salida. No obstante, puede suceder que diferentes valores de entrada den el mismo valor de salida.

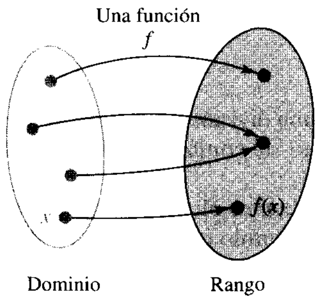


Figura 1

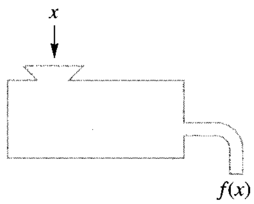


Figura 2

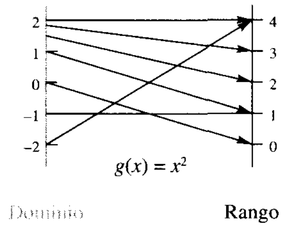


Figura 3

La definición no pone restricción sobre los conjuntos del dominio y del rango. El dominio podría consistir en el conjunto de personas en su curso de cálculo, el rango el conjunto de calificaciones $\{A, B, C, D, F\}$ que obtendrán y la regla de correspondencia la asignación de calificaciones. Casi todas las funciones que usted encontrará en este texto serán funciones de uno o más números reales. Por ejemplo, la función g podría tomar un número real x y elevarlo al cuadrado, lo cual produciría el número real x^2. En este caso tenemos una fórmula que da la regla de correspondencia; esto es, $g(x) = x^2$. Un diagrama esquemático de esta función se muestra en la figura 3.

Notación funcional Una sola letra como f (o g o F) se utiliza para nombrar una función. Entonces $f(x)$, que se lee "f de x" o "f en x", denota el valor que f asigna a x. Por lo tanto, si $f(x) = x^3 - 4$, entonces

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Estudie cuidadosamente los siguientes ejemplos. Aunque algunos podrían parecer extraños, tendrán un papel importante en el capítulo 2.

EJEMPLO 1 Para $f(x) = x^2 - 2x$, determine y simplifique

(a) $f(4)$ (b) $f(4 + h)$

(c) $f(4 + h) - f(4)$ (d) $[f(4 + h) - f(4)]/h$

SOLUCIÓN

(a) $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

(b) $f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2(4 + h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$
$= 8 + 6h + h^2$

(c) $f(4 + h) - f(4) = 8 + 6h + h^2 - 8 = 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = \dfrac{h(6 + h)}{h} = 6 + h$ ■

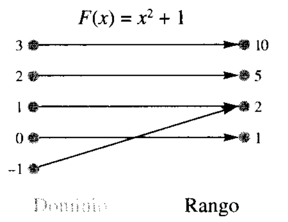


Figura 4

Dominio y rango Para especificar por completo una función, debemos establecer, además de la regla de correspondencia, el dominio de la función. Por ejemplo, si F es la función definida por $F(x) = x^2 + 1$ con dominio $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (véase la figura 4), entonces el rango es $\{1, 2, 5, 10\}$. La regla de correspondencia, junto con el dominio, determina el rango.

Cuando no se especifica un dominio para una función, suponemos que es el conjunto más grande de números reales para el cual la regla de la función tiene sentido. Éste se denomina **dominio natural**. Los números que debe recordar para excluirlos del dominio natural son aquellos que causarían una división entre cero o la raíz cuadrada de un número negativo.

EJEMPLO 2 Determine los dominios naturales para

(a) $f(x) = 1/(x - 3)$ (b) $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$

(c) $h(w) = 1/\sqrt{9 - w^2}$

SOLUCIÓN

(a) Debemos excluir al 3 del dominio porque requeriría una división entre cero. Así, el dominio natural es $\{x: x \neq 3\}$. Esto se puede leer como "el conjunto de las x, tales que x no es igual a 3".

(b) Para evitar la raíz cuadrada de un número negativo debemos elegir t, de modo que $9 - t^2 \geq 0$. Así, t debe satisfacer $|t| \leq 3$. Por lo tanto, el dominio natural es $\{t: |t| \leq 3\}$, que mediante la notación de intervalos puede escribirse como $[-3, 3]$.

(c) Ahora debemos evitar la división entre cero y las raíces cuadradas de números negativos, de modo que excluimos a -3 y 3 del dominio natural. Por lo tanto, el dominio natural es el intervalo $(-3, 3)$. ■

Cuando la regla para una función está dada por medio de una ecuación de la forma $y = f(x)$, llamamos a la x **variable independiente** y a la y **variable dependiente**. *Cualquier* valor en el dominio puede sustituirse por la variable independiente. Una vez seleccionado, este valor de x determina completamente el correspondiente valor de la variable dependiente y.

La entrada para una función no necesita ser un solo número real. En muchas aplicaciones importantes, una función depende de más de una variable independiente. Por ejemplo, el monto A del pago mensual de un automóvil depende del préstamo del capital P, la tasa de interés r y el número n de pagos mensuales solicitados. Podríamos escribir tal función como $A(P, r, n)$. El valor de A (16000, 0.07, 48) —es decir, el pago mensual requerido para saldar un préstamo de $16,000 en 48 meses a una tasa de interés anual de 7%— es $383.14. En esta situación no existe una fórmula matemática sencilla que proporcione la salida A en términos de las variables de entrada P, r y n.

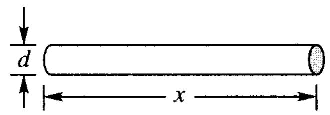


Figura 5

EJEMPLO 3 Denótese con $V(x, d)$ el volumen de una varilla cilíndrica de longitud x y diámetro d. (Véase la figura 5.) Determine

(a) una fórmula para $V(x, d)$
(b) el dominio y rango de V
(c) $V(4, 0.1)$

SOLUCIÓN

(a) $$V(x, d) = x \cdot \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi x d^2}{4}$$

(b) Puesto que la longitud y el diámetro de la varilla deben ser positivos, el dominio es el conjunto de pares ordenados (x, d) donde $x > 0$ y $d > 0$. Cualquier volumen positivo es posible, de modo que el rango es $(0, \infty)$.

(c) $$V(4, 0.1) = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 0.1^2}{4} = 0.01\pi$$ ■

En los capítulos del 1 al 11 se usarán principalmente funciones de una sola variable independiente. A partir del capítulo 12 estudiaremos propiedades de funciones de dos o más variables independientes.

Calculadora graficadora

Recuerde, utilice su calculadora graficadora para reproducir las figuras en este libro. Experimente con diferentes ventanas hasta que se convenza de que comprende todos los aspectos importantes de la gráfica.

Gráficas de funciones Cuando el dominio y el rango de una función son conjuntos de números reales, podemos describir la función mediante el trazo de su gráfica en un plano coordenado. La **gráfica de una función** f simplemente es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

EJEMPLO 4 Bosqueje las gráficas de

(a) $f(x) = x^2 - 2$ (b) $g(x) = 2/(x - 1)$

SOLUCIÓN Los dominios naturales de f y g son todos los números reales y todos los números reales excepto el 1, respectivamente. Mediante el procedimiento descrito en la sección 0.4 (construir una tabla de valores, trazar los puntos correspondientes, conectarlos por medio de una curva suave) obtenemos las dos gráficas que se muestran en las figuras 6 y 7a. ■

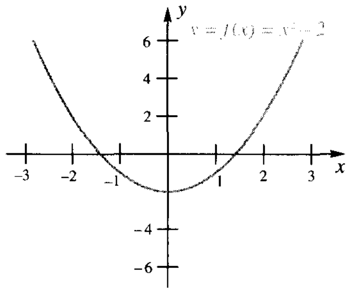


Figura 6

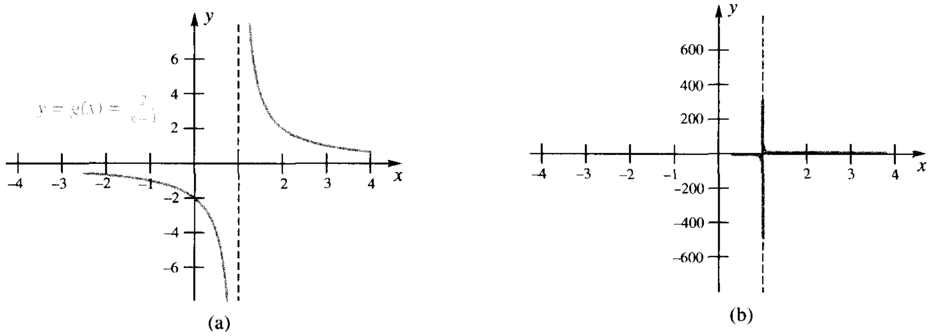


Figura 7

Ponga atención especial en la gráfica de g; ésta apunta a una sobresimplificación de lo que hemos realizado y ahora necesitamos corregir. Cuando se unen los puntos por medio de una curva suave, no se efectúa de una manera mecánica que ignore las características especiales que podrían ser aparentes en la fórmula de la función. En el caso $g(x) = 2/(x - 1)$, algo drástico sucede cuando x se aproxima a 1. De hecho, los valores de $|g(x)|$ aumentan sin cota; por ejemplo, $g(0.99) = 2/(0.99 - 1) = -200$ y $g(1.001) = 2000$. Esto lo hemos indicado mediante una recta vertical, llamada **asíntota**, en $x = 1$. Cuando x se acerca a 1, la gráfica se aproxima cada vez más a esta recta, aunque la recta no es parte de la gráfica. Más bien es una guía. Observe que la gráfica de g también tiene una asíntota horizontal, el eje x.

Funciones como $g(x) = 2/(x - 1)$ pueden causar problemas cuando usted las grafica por medio de un CAS. Por ejemplo, cuando se le pidió a *Maple* graficar $g(x) = 2/(x - 1)$ en el dominio $[-4, 4]$ respondió con la gráfica que se muestra en la figura 7b. Los CAS utilizan un algoritmo muy parecido al que se describió en la sección 0.4; seleccionan diversos valores para x en el dominio establecido; encuentran los correspondientes valores de y, y dibujan estos puntos conectándolos con rectas. Cuando *Maple* seleccionó un número cercano a 1, la salida resultante fue grande, lo cual llevó al eje y a escalar en la figura. *Maple* también conecta los puntos que cruzan el punto de corte en $x = 1$. Siempre debe tener precaución y ser cuidadoso cuando utilice una calculadora gráfica o un CAS para graficar funciones.

Los dominios y rangos para las funciones f y g se muestran en la siguiente tabla.

Función	Dominio	Rango
$f(x) = x^2 - 2$	todos los números reales	$\{y: y \geq -2\}$
$g(x) = \dfrac{2}{x - 1}$	$\{x: x \neq 1\}$	$\{y: y \neq 0\}$

Funciones pares y funciones impares Con frecuencia podemos predecir las simetrías de la gráfica de una función al examinar la fórmula para la función. Si $f(-x) = f(x)$ para toda x, entonces la gráfica es simétrica respecto al eje y. Tal función se denomina

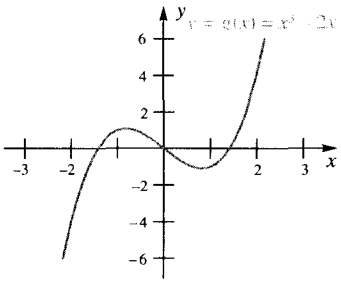


Figura 8

función par, quizá porque una función que se especifica $f(x)$ como una suma de sólo potencias pares de x es par. La función $f(x) = x^2 - 2$ (graficada en la figura 6) es par; al igual que $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 11x^2 - 5$, $f(x) = x^2/(1 + x^4)$ y $f(x) = (x^3 - 2x)/3x$.

Si $f(-x) = -f(x)$ para toda x, la gráfica es simétrica con respecto al origen. A tal función le llamamos **función impar**. Una función que da $f(x)$ como una suma de sólo potencias impares de x es impar. Así, $g(x) = x^3 - 2x$ (graficada en la figura 8) es impar. Observe que

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$$

Considere la función $g(x) = 2/(x - 1)$ del ejemplo 4 que graficamos en la figura 7. No es par ni impar. Para ver esto, note que $g(-x) = 2/(-x - 1)$, que no es igual ni a $g(x)$ ni a $-g(x)$. Observe que la gráfica de $y = g(x)$ no es simétrica respecto al eje y ni con respecto al origen.

EJEMPLO 5 ¿$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$ es par, impar o ninguna de éstas?

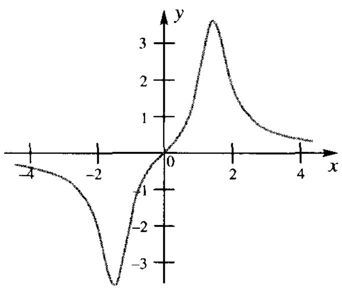


Figura 9

SOLUCIÓN Como

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 4} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^4 - 3x^2 + 4} = -f(x)$$

f es una función impar. La gráfica de $y = f(x)$ (véase la figura 9) es simétrica respecto al origen. ■

Dos funciones especiales Entre las funciones que con frecuencia utilizaremos como ejemplos, hay dos que son muy especiales: la **función valor absoluto,** $|\ \ |$, y la **función máximo entero,** $[\![\ \ ]\!]$. Se definen como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y

$$[\![x]\!] = \text{el mayor entero que es menor o igual a } x$$

Así, $|-3.1| = |3.1| = 3.1$, mientras que $[\![-3.1]\!] = -4$ y $[\![3.1]\!] = 3$. En las figuras 10 y 11 mostramos las gráficas de estas dos funciones. La función valor absoluto es par, ya que $|-x| = |x|$. La función máximo entero no es par ni impar, como lo puede ver con base en su gráfica.

Con frecuencia recurrimos a las siguientes características especiales de estas gráficas. La gráfica de $|x|$ tiene un pico en el origen, mientras que la gráfica de $[\![x]\!]$ da un salto en cada entero.

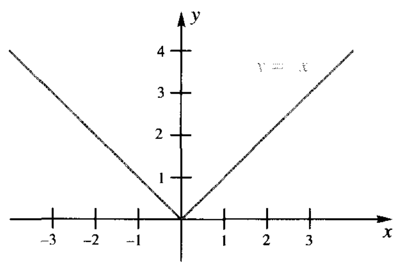


Figura 10

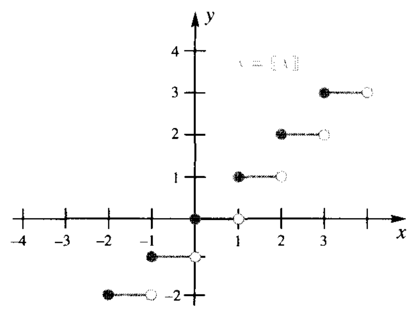


Figura 11