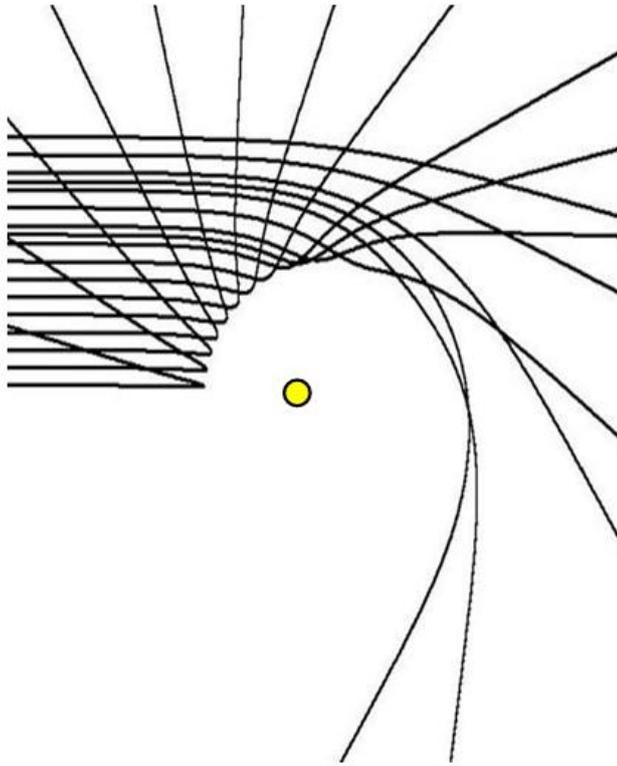


Mecánica clásica



Víctor Hugo Ponce

Dedicado a Yoli, por todo
y porque este libro no hubiera sido posible
sin su apoyo.

Agradecimientos

Deseo agradecer a los docentes del Instituto Balseiro que me hicieron conocer la Mecánica clásica: José Cotignola, Leonardo Mascheroni y Nicolás Martinic, a todos los colegas con los que compartí las cátedras de Mecánica: Andrés García, Cristina Terrile, María Teresa Causa, Manuel Tovar, Horacio Wio, Norberto Vaieretti, Alberto Oliva, Jorge Regollini, Pablo Fainstein, Enzo Dari, Verónica Garea, Gustavo Demarco, Sergio Grillo, Griselda García, Henry Herce, Cecilia Ventura, Gabriela Puente, Mario Scheble, María Teresa Malachevsky, Agustín Rauschert, Guillermo Pregliasco, y en especial a los alumnos con los que aprendimos Mecánica con placer y esfuerzo a lo largo de tantas horas en el aula.

A la Universidad Nacional de Cuyo por haber hecho posible la publicación de este libro, en especial a los Doctores Carlos Passera, Manuel Tovar y a los Profesores René Gotthelf y María Delia Vivante.

A Anabella Procopio y Emilio Figueroa por su ayuda en la preparación del manuscrito.

Contenido

Prólogo.....	1
Capítulo 1: Fundamentos de la Mecánica clásica.....	3
Capítulo 2: Formulación lagrangiana de la Dinámica clásica.....	47
Capítulo 3: Problema de dos cuerpos con fuerzas centrales.....	85
Capítulo 4: Física de Colisiones.....	109
Capítulo 5: Cuerpos rígidos. Tensor de inercia.....	135
Capítulo 6: Dinámica del cuerpo rígido.....	169
Capítulo 7: Oscilaciones.....	215
Capítulo 8: Pequeñas oscilaciones.....	229
Capítulo 9: Formulación hamiltoniana de la Mecánica clásica.....	259
Capítulo 10: Oscilaciones no lineales. Caos.....	301
Capítulo 11: Teoría especial de la Relatividad.....	315
Bibliografía.....	375
Índice alfabético.....	379
Índice general	383

Prólogo

Este libro fue gestándose a lo largo de tres décadas de cursos de Mecánica clásica dictados en el Instituto Balseiro a estudiantes de las carreras de Física e Ingeniería Nuclear. Es el resultado final de las sucesivas notas de clase que en el transcurso de ese tiempo fueron creciendo al incorporar nuevos temas y aplicaciones y enriqueciéndose con los aportes de mis colegas de cátedra y los alumnos que tomaron este curso.

El propósito que me guió al darle forma final a estas notas es en primer lugar transmitir a las generaciones venideras de docentes y alumnos la experiencia adquirida al enseñar y aprender Mecánica clásica, unido al intento de compartir el placer y la belleza que encierra este capítulo del conocimiento humano. Nacida en su forma presente con los aportes que Galileo realizara a comienzos del siglo XVII, reveló todo su potencial en la descripción de la Naturaleza en los inicios del siglo XVIII cuando Newton enunció las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos sometidos a interacciones mutuas. Los comienzos del siglo XIX fueron propicios para potenciar el formalismo matemático y generalizar el campo de aplicación de la Mecánica Newtoniana a través de las contribuciones, entre otros, de Lagrange, Euler y Hamilton. Finalmente, las dos primeras décadas del siglo XX fueron testigos de la última gran revolución de la Física clásica introducida por Einstein con sus teorías de la Relatividad que ampliaron el ámbito de aplicación de la Mecánica clásica a todo el rango de velocidades y masas de los cuerpos macroscópicos.

El libro está dividido en once capítulos donde se desarrollan los métodos formales dirigidos a predecir la evolución de cuerpos macroscópicos sometidos a interacciones mutuas, y a presentar las principales aplicaciones.

Un par de textos que han sido referentes básicos para escribir este libro y constituyen lecturas recomendadas a la hora de aclarar o ampliar los temas desarrollados son **Mecánica Clásica** de Herbert Goldstein[1] y **Mecánica** de Lev D. Landau y Evgenii M. Lifshitz[2].

Los temas tratados en este libro y las aplicaciones presentadas excederían el tiempo habitual de clases de un semestre de las carreras de grado de Física e Ingeniería. Algunos temas identificados como opcionales son desarrollados con mayor detenimiento y profundidad que lo habitual en beneficio de aquellos lectores especialmente interesados en ellos, y de otros cuya curiosidad por ver de qué tratan espero pueda ser recompensada con el placer que encontré al escribirlos.

Cada capítulo se completa con la presentación de ejemplos donde se trata con detalle la aplicación del formalismo a problemas concretos. Por último, se proponen ejercicios a resolver por el lector que le permitirán tener una medida de su manejo del tema. No está demás subrayar la importancia tanto de comprender los razonamientos y deducciones que llevan a resolver los ejemplos, como la de ejercitar lo aprendido con la resolución de los ejercicios propuestos.

Todas las referencias bibliográficas pueden consultarse en la Biblioteca del Instituto Balseiro-Centro Atómico Bariloche.

Este libro presupone que el lector posee conocimientos básicos de análisis vectorial, álgebra lineal y cálculo diferencial e integral en una o más variables.

MECÁNICA CLÁSICA

Capítulo 1

Fundamentos de la Mecánica clásica

1.1. Introducción

La Mecánica clásica es un intento del hombre por comprender el mundo que lo rodea. Para ello, se erige en observador del resto del universo más allá de sí mismo. Observar significa aquí medir y conservar el registro de lo medido. Pero la intención no es la de tener "fotografías" de partes del universo en diferentes momentos y circunstancias, sino la de comprender las razones del cambio en esas imágenes. Nada es inmutable, todo se modifica en torno al observador.

El observador debe tener elementos para registrar con la mayor precisión posible los otros componentes del universo. Debe separar entonces los objetos que van a ser motivo de su estudio de aquéllos que usará como instrumentos de medida. Definimos entonces tres componentes: observador, instrumentos de medición y sistema físico.

Para que el estudio del sistema físico sea lo más preciso posible es necesario que la perturbación que sobre él causa el instrumento de medida sea mínimo. De la misma forma debe ser minimizada la influencia del observador sobre el instrumento de medida. En el Complemento I al final de este Capítulo analizaremos en más profundidad las perturbaciones causadas sobre un objeto al realizar una medición de alguna de sus propiedades.

¿Cuáles son los objetos que forman el universo de la Mecánica clásica? Usando la capacidad de observación del hombre hasta fines del siglo diecinueve, dichos objetos son los cuerpos materiales, que ocupan un lugar en el espacio tridimensional percibido por nuestros sentidos. Estos cuerpos pueden subdividirse sucesivamente en fracciones cada vez más pequeñas hasta alcanzar un elemento básico que llamaremos partícula o punto material. Estos puntos materiales no pueden superponerse, y por yuxtaposición constituyen todos los cuerpos conocidos. Existen diferentes tipos de materia, que se manifiestan en las propiedades de un cuerpo y en la forma en que los cuerpos vecinos perciben su presencia.

EL OBJETIVO BÁSICO DE LA MECÁNICA CLÁSICA ES DETERMINAR EL MECANISMO POR EL QUE LOS CUERPOS INTERACTÚAN ENTRE SÍ, Y PREDECIR LA FORMA EN QUE EVOLUCIONARÁN A CAUSA DE DICHAS INTERACCIONES.

La Mecánica clásica deja de lado otro componente básico del mundo tal como lo perciben en forma directa los sentidos del hombre, cual es la luz. Se asume que la luz no participa ni modifica

las interacciones entre cuerpos materiales. Veremos al final de este curso que en realidad la luz posee muchas de las propiedades que en primer lugar se asignaron a la materia, y que no siempre es posible realizar estudios separados de estos dos componentes del mundo en que vivimos.

1.2. Espacio y tiempo

Los conceptos fundamentales de la física son los de espacio y tiempo. La posición de cada partícula de un cuerpo material queda determinada por tres números reales en el espacio tridimensional. La forma más simple de definir estos números es mediante las coordenadas cartesianas ortogonales: se elige un punto O y tres direcciones mutuamente ortogonales que pasan por el mismo y llamadas ejes coordenados: las coordenadas (x, y, z) son las distancias entre los planos definidos por pares de dichos ejes y planos paralelos a los mismos que pasan por el punto A. Esos tres números ordenados (x, y, z) definen lo que llamamos el vector posición de la partícula:

$$\vec{r} \equiv (x, y, z)$$

y gráficamente representa el segmento orientado que nace en el origen de coordenadas O y termina en el punto P, tal como lo muestra la figura 1.1

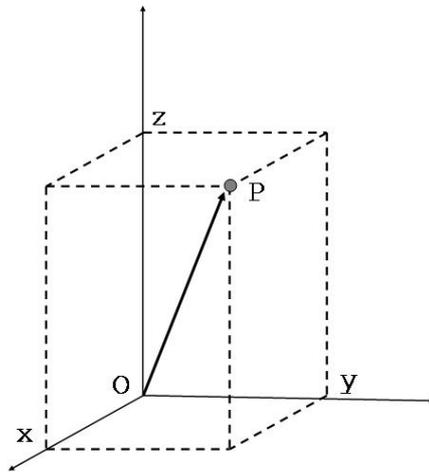


Figura 1.1: Coordenadas cartesianas ortogonales

Compararemos las coordenadas de la partícula con las de un testigo que se repita periódicamente, por ejemplo la posición del sol en el cielo. Esto es lo que llamamos un reloj y dicha posición se identifica con una variable llamada tiempo. Suponemos que tanto las coordenadas como el tiempo son variables continuas representadas por números reales.

La velocidad del cuerpo en cada una de las tres direcciones se define como la tasa de variación de la coordenada respectiva en relación al tiempo transcurrido. Empleando el concepto de derivada, el cuerpo posee tres velocidades dadas por:

$$dx/dt = \lim_{t_2-t_1 \rightarrow 0} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (1.1)$$

con expresiones similares para las velocidades en dirección y y z . El vector velocidad queda definido por:

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Las componentes x, y, z del vector posición o las $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ del vector velocidad dependen de la forma en que elijamos las direcciones de los ejes coordenados. Dado un origen O tenemos infinitas ternas de direcciones mutuamente ortogonales que pasan por el mismo, y para cada una de ellas habrá diferentes componentes que definan el mismo vector.

En la figura 1.2 representamos el caso más sencillo de un vector en un plano, definido en dos sistemas coordenados.

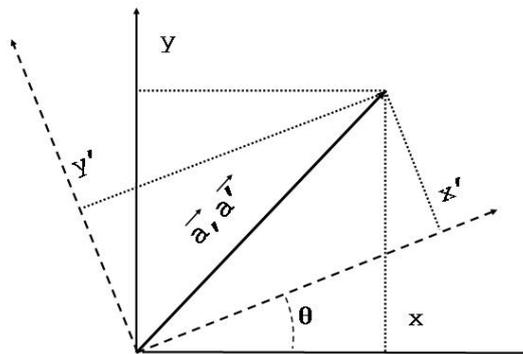


Figura 1.2: Rotación de ejes coordenados en el plano

La rotación de los ejes ortogonales en un ángulo θ produce una transformación en las componentes que definen el mismo vector:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x, y) \\ \vec{a}' &= (x', y') \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= y \cos \theta - x \sin \theta \end{aligned}$$

Ésta es una transformación lineal en las componentes del vector, y representa la rotación del sistema de ejes coordenados.

1.3. Objetivos de la Mecánica clásica

La Mecánica clásica estudia el movimiento de los cuerpos macroscópicos que se mueven con velocidades muy pequeñas frente a la de la luz; quedan fuera de su descripción los cuerpos del orden del tamaño atómico. La Mecánica cuántica generaliza la Mecánica clásica de modo que se puedan describir fenómenos al nivel atómico. La Teoría especial de la Relatividad de Einstein produce la generalización de la Mecánica clásica para cuerpos que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz.

LA MECÁNICA CLÁSICA ES UNA TEORÍA QUE PERMITE DESCRIBIR EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS Y PREDECIR SU EVOLUCIÓN.

Como toda teoría, está fundamentada en principios surgidos de la observación de los fenómenos físicos. Proponemos un conjunto de principios, el mínimo posible, y a partir de ellos deducimos propiedades de la evolución de los cuerpos. Mientras nuestras predicciones coincidan con lo que observamos en la naturaleza esos principios se asumen válidos. Cuando se note una discrepancia deberán ser modificados o reemplazados.

Un concepto básico de toda teoría es que no debe tener elementos arbitrarios. Por ejemplo no debe haber puntos privilegiados en el espacio sin razón para ello. Supondremos entonces que las leyes de la Física tendrán la misma forma en todos los puntos del espacio (esto significa por ejemplo que *fuerza = masa × aceleración* vale como relación en todo el universo, pero la fuerza puede y en general es diferente según cuál sea el punto que consideremos). Concretamente, las leyes en que se basa la teoría tienen una forma independiente del origen de coordenadas elegido: por ejemplo, la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$$

es una expresión independiente del origen elegido para describir el vector posición $\vec{r}(t)$. En el mismo sentido, cuando existen dos observadores en movimiento relativo el uno respecto del otro, no hay razón lógica para decidir quién está en reposo y quién en movimiento. Esto nos lleva a enunciar el

PRINCIPIO DE RELATIVIDAD: LA FORMA QUE ADOPTAN LAS LEYES DE LA FÍSICA ES LA MISMA PARA TODOS LOS OBSERVADORES EN MOVIMIENTO UNIFORME RELATIVO ENTRE SÍ.

No es el mismo caso cuando se consideran observadores en marcos de referencia acelerados, donde cambiará por ejemplo la forma de la segunda ley de Newton a través de la aparición de fuerzas ficticias, ligadas a la aceleración de quien observa el movimiento de los cuerpos.

1.4. Sistemas de referencia

El sistema de coordenadas cartesianas ortogonales describe el vector posición de un punto como la combinación lineal de tres vectores unitarios a lo largo de direcciones mutuamente ortogonales:

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

Este sistema no es el único ni en ocasiones el más conveniente para describir la evolución de un punto. Si por ejemplo dicho punto está limitado a moverse sobre una superficie esférica será más conveniente el sistema de coordenadas esféricas, y en otras circunstancias podrá serlo el de coordenadas cilíndricas.

En coordenadas esféricas presentadas en la figura 1.3 los vectores unitarios son $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$, dirigidos en las direcciones de máximo crecimiento de las coordenadas r, θ, φ :

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

Por ello, estas direcciones dependen del punto considerado:

$$d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta + \sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi$$

$$d\hat{e}_\theta = -d\theta\hat{e}_r + \cos\theta d\varphi\hat{e}_\varphi$$

$$d\hat{e}_\varphi = -\sin\theta d\varphi\hat{e}_r - \cos\theta d\varphi\hat{e}_\theta$$

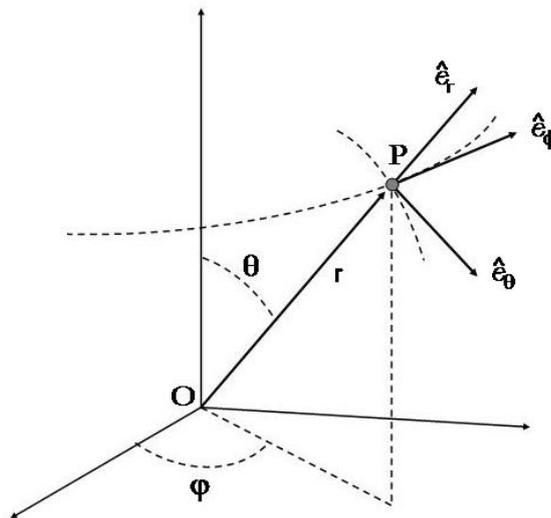


Figura 1.3: Coordenadas esféricas

En coordenadas cilíndricas de figura 1.4 los vectores unitarios $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi$ están dirigidos en las direcciones de máximo crecimiento de las coordenadas ρ, φ del plano normal al eje z . Ahora las

MECÁNICA CLÁSICA

direcciones $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi$ dependen del punto considerado en tanto que \hat{e}_z es fija, independiente de dicho punto:

$$d\hat{e}_\rho = d\varphi \cdot \hat{e}_\varphi$$

$$d\hat{e}_\varphi = -d\varphi \cdot \hat{e}_\rho$$

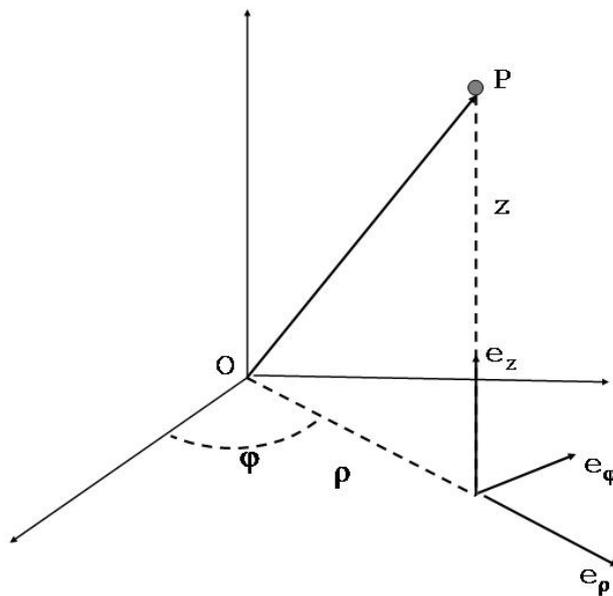


Figura 1.4: Coordenadas cilíndricas

Dejamos como un ejercicio expresar la posición, velocidad y aceleración de un punto en estos tres sistemas. Los resultados son:

$$\vec{r}(t) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z$$

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\hat{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] \hat{e}_r \\ &+ \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] \hat{e}_\theta + \\ &\left[2\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\sin\theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\hat{e}_\rho + z(t)\hat{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right] \hat{e}_\rho \\ &+ \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right] \hat{e}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z\end{aligned}$$

1.5. Cinemática de una partícula

La evolución de una partícula en el espacio tridimensional queda determinada por dos vectores independientes uno del otro: su posición $\vec{r}(t)$ y su velocidad $\vec{v}(t)$. La aceleración $\vec{a}(t)$ va a quedar determinada por la segunda ley de Newton.

La posición $\vec{r}(t)$ está definida por el vector radial $r(t)\hat{e}_r$, en tanto que la velocidad $\vec{v} = v_r\hat{e}_r + v_t\hat{e}_t$ tendrá en general una componente radial $\frac{dr}{dt}\hat{e}_r$ y una tangencial $v_t\hat{e}_t$ tal como vemos en la figura 1.5

La componente tangencial define junto con \vec{r} un plano. Un observador en el origen ve un desplazamiento de la orientación de la partícula que puede representar por una rotación alrededor de un eje \hat{e}_n normal al plano (\hat{e}_t, \hat{e}_r) , con velocidad angular

$$\Omega = \frac{v_t}{r} = \frac{v \cdot \sin \alpha}{r}$$

Tanto la dirección del eje de rotación como la magnitud de la velocidad quedan determinadas por el vector llamado velocidad angular

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} \quad (1.2)$$

donde vemos que $\vec{\Omega}$ tiene la dirección \hat{e}_n normal al plano de rotación. Además, el sentido de la rotación queda definido por el sentido de movimiento del tirabuzón que gira desde el vector \vec{r} hacia el \vec{v} . A su vez, si conocemos el vector velocidad angular $\vec{\Omega}$ podemos determinar la velocidad tangencial:

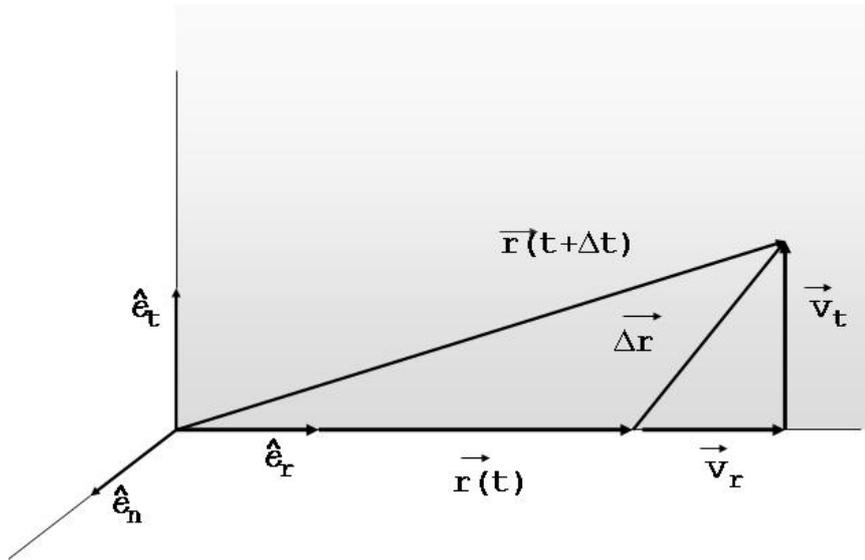


Figura 1.5: Posición y velocidad de una partícula en tres dimensiones

$$\vec{v}_t = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Dado un cuerpo que sigue una trayectoria $\vec{r}(t)$ pasando por un punto $\vec{r}(t_0)$, podemos suponer que instantáneamente se mueve en el plano definido por $\vec{r}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$. Su aceleración en ese punto tiene una componente radial $a_r \hat{e}_r$. Podemos aproximar la trayectoria en las cercanías del punto $\vec{r}(t_0)$ por un círculo que pasa por $\vec{r}(t_0)$, que es tangente a $\vec{v}(t_0)$ y que tiene por radio el valor R_0 tal que $a_r = v^2(t_0)/R$. De esta forma se describen exactamente la posición, velocidad y aceleración radial de la partícula por el solo hecho de moverse en el círculo de radio R_0 . Este es el llamado eje instantáneo de rotación (figura 1.6)

1.6. Leyes de Newton

La física aristotélica suponía que a cada forma de materia le correspondía una posición natural en el universo, y si se la alejaba de esa ubicación tendía a retornar a la misma a menos que una acción externa se lo impidiera. A los cuerpos terrestres les correspondía el centro del universo, de modo que una piedra lanzada por los aires tendía a caer y acercarse todo lo que pudiera a ese centro. La primera ley de Newton reemplaza la hipótesis de Aristóteles y tiene como antecedente observaciones de Galileo, manifestando que para cualquier observador en movimiento no acelerado un

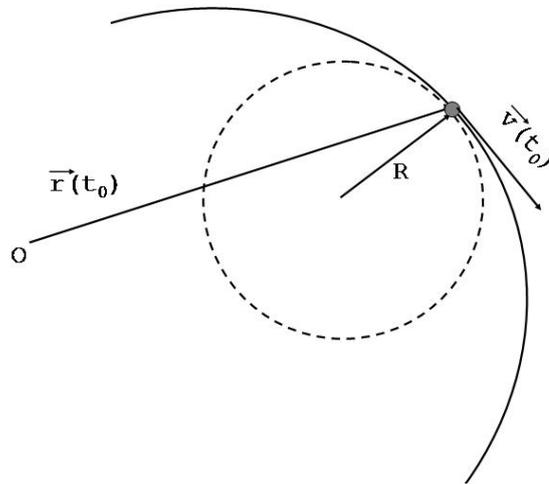


Figura 1.6: Eje instantáneo de rotación

cuerpo que no está sometido a acciones externas conserva el estado de movimiento en que se encuentra: permanece en reposo o en movimiento uniforme. Como la velocidad de un cuerpo es un concepto relativo (depende del estado de movimiento del observador), la primera ley de Newton dice estrictamente que

UN CUERPO NO SOMETIDO A ACCIONES EXTERNAS CONSERVA EL ESTADO DE MOVIMIENTO EN QUE SE ENCUENTRA CUANDO SE LO OBSERVA DESDE UN SISTEMA INERCIAL, ES DECIR NO ACELERADO.

Expresada de esta forma, la primera ley de Newton es una prescripción para determinar un marco de referencia inercial: si un cuerpo aislado del resto del universo se mueve con velocidad uniforme, es que lo estamos observando desde un sistema inercial.

La segunda ley de Newton indica que cuando hay acciones externas aplicadas al cuerpo, éste modifica su estado de movimiento uniforme variando su velocidad. La variación de velocidad depende del agente externo actuante sobre el cuerpo. En general todos los generadores de fuerzas son otros cuerpos: será la interacción gravitatoria entre las masas de dos cuerpos, o la interacción electromagnética si están cargados, o un resorte que los une. A la intensidad de la acción se la llama fuerza, es un vector pues modifica las tres componentes de la velocidad del cuerpo. Si hacemos actuar la fuerza generada por un cuerpo sucesivamente sobre otros cuerpos de diferente tamaño pero con las mismas propiedades (por ejemplo la misma carga eléctrica), encontramos experimentalmente que las aceleraciones producidas tienen la misma dirección y sentido pero diferentes intensidades. La segunda ley de Newton dice entonces que:

VISTO DESDE UN MARCO DE REFERENCIA INERCIAL, EL CAMBIO EN LA VELOCIDAD DE UN CUERPO ES PROPORCIONAL A LA FUERZA EJERCIDA SOBRE ÉL, SIENDO LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD UN ESCALAR CARACTERÍSTICO DEL CUERPO LLAMADO MASA INERCIAL:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad (1.3)$$

Se comprueba por observaciones de las acciones de varios cuerpos sobre uno dado el principio de superposición de fuerzas:

EL CUERPO EVOLUCIONA COMO SOMETIDO A UNA ÚNICA FUERZA OBTENIDA DE LA SUMA VECTORIAL DE LAS FUERZAS INDIVIDUALES.

La segunda ley de Newton es una definición de fuerza: para determinar el campo vectorial de fuerzas producido por un ente (por ejemplo varios cuerpos) colocamos un cuerpo en cada punto del espacio y medimos la aceleración que sufre; ésta es proporcional a la fuerza actuante en ese punto.

La masa inercial es una propiedad del cuerpo. El mismo valor m identifica la masa gravitatoria, que aparece en la definición de la fuerza gravitatoria entre dos cuerpos:

$$\vec{f}_{12} = -gm_1m_2 \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

donde \vec{f}_{12} es la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el 2 y $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ el vector con origen en 1 y extremo en 2. g es una constante positiva. Mediciones cuidadosas muestran que la masa inercial y la gravitatoria son idénticas con una precisión de una parte en 10^{12} .

La tercera ley de Newton es la más sustanciosa, nos dice que

LAS ACCIONES MUTUAS QUE DOS CUERPOS EJERCEN ENTRE SÍ ESTÁN REPRESENTADAS POR FUERZAS DE IGUAL MAGNITUD Y DIRECCIÓN Y DE SENTIDOS OPUESTOS:

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

donde \vec{f}_{ij} representa la fuerza sobre el cuerpo j producida por la acción del cuerpo i .

Esta ley no es estrictamente válida si consideramos que las interacciones se propagan con velocidad finita (por ejemplo las interacciones electromagnéticas o gravitatorias se propagan con la velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8 m/s$). Se definen dos formas para esta ley de acción y reacción entre cuerpos: la forma fuerte donde las fuerzas además de iguales y de sentido contrario son colineales (figura 1.7), y la forma débil donde no lo son y por lo tanto definen una cupla (figura 1.8).

Las interacciones gravitatorias pertenecen a la forma fuerte, las electromagnéticas a la débil.

La interacción entre dos cuerpos debe depender solamente de las propiedades del par: su coordenada relativa $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, eventualmente su velocidad relativa $\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, y propiedades internas de los cuerpos (cargas, momentos magnéticos, etc.). En el caso de la forma fuerte las

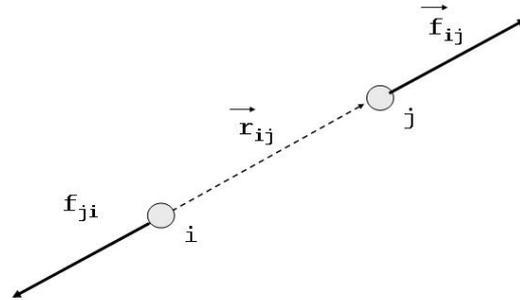


Figura 1.7: Fuerzas colineales

fuerzas están aplicadas en la dirección \vec{r}_{12} y no pueden depender de otras direcciones como la de la velocidad relativa. Por el contrario, las fuerzas electromagnéticas dependen de la posición y velocidad relativa del par de cargas.

Un análisis riguroso de las leyes de Newton y una interpretación alternativa de las mismas puede encontrarse en el texto de José y Saletan,[3] y en el artículo de Eisenbud[4].

1.7. Sistemas de una partícula

Si tenemos el caso de una partícula moviéndose en un campo de fuerzas conocido, la segunda ley de Newton permite determinar la posición de la partícula como función del tiempo t . Para ello es necesario conocer las condiciones iniciales del movimiento, y por ser la segunda ley de Newton una ecuación diferencial lineal de segundo orden debemos fijar la posición y velocidad al tiempo inicial $t_0 < t$:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{F}(\vec{r}, t) \\ \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{t=t_0} &= \vec{v}_0 \end{aligned}$$

En el caso general de un sistema de n partículas donde actúa una fuerza sobre cada una de ellas, producida por acciones externas y por interacciones entre las partículas, tendremos un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas entre sí:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, t), i = 1, 2, \dots, n$$

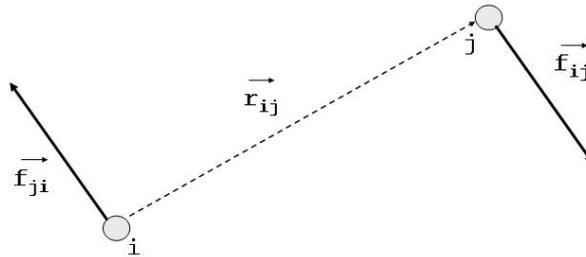


Figura 1.8: Fuerzas no colineales

$$\begin{aligned} \vec{r}_i(t_0) &= \vec{r}_{i0} \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Big|_{t=t_0} &= \vec{v}_{i0} \end{aligned}$$

Va a ser mucho más difícil encontrar las soluciones $\vec{r}_i(t)$, y en general será necesario recurrir a la integración numérica de las ecuaciones diferenciales acopladas. Tal es el caso del problema de los tres cuerpos sometidos a atracciones gravitatorias mutuas.

Hay ocasiones en que la dificultad no reside en obtener las funciones $\vec{r}_i(t)$ con la precisión deseada, sino que estas soluciones son inestables respecto de los valores fijados para las condiciones iniciales: un pequeño cambio en una posición o velocidad inicial

$$|\vec{r}_i(0) - \vec{r}'_i(0)| \ll |\vec{r}_i(0)|$$

produce para un tiempo de evolución lo suficientemente grande una divergencia entre las posiciones:

$$|\vec{r}_i(t) - \vec{r}'_i(t)| / |\vec{r}_i(0) - \vec{r}'_i(0)| \rightarrow \infty$$

En estos casos el movimiento es caótico y carece de sentido el cálculo de la evolución para un dado conjunto de valores fijados de posición y velocidad iniciales, pues en la práctica éstas no se pueden fijar con precisión absoluta. Sólo tendrá relevancia un análisis estadístico de la evolución del sistema. Por el momento consideraremos problemas con soluciones estables, dejando para más adelante el tratamiento del caos.

La unicidad de la solución de las ecuaciones de Newton frente a las condiciones iniciales impuestas es analizada en el trabajo de A. Dhar[5], quien determina las condiciones necesarias y suficientes para esta unicidad.

1.7.1. Teoremas de conservación

Los teoremas de conservación son consecuencia directa de las leyes de Newton y su verificación experimental sirve para comprobar aquéllas. Para el caso de un cuerpo de masa m

EL IMPULSO LINEAL, DEFINIDO POR $\vec{P} = m\vec{v}$, ES CONSTANTE EN UNA DIRECCIÓN EN QUE LA FUERZA APLICADA ES NULA.

La verificación es trivial a partir de la segunda ley de Newton:

$$m \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = F_i(\vec{r}, t)$$

$$P_i = m \frac{dx_i(t)}{dt} = \text{constante}$$

si $F_i(\vec{r}, t) = 0$.

El impulso lineal, también conocido como cantidad de movimiento o momentum, puede utilizarse para reescribir las tres leyes de Newton de una manera más compacta. Las dos primeras leyes se resumen diciendo que el impulso lineal de un sistema de N partículas no sometido a acciones externas se conserva:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i(t) = \text{constante}$$

Para el caso de dos partículas se reduce a:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) = \text{constante}$$

que implica:

$$\vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t) = \text{constante}$$

entonces:

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_1(t) + \frac{d}{dt} \vec{P}_2(t) = 0 \tag{1.4}$$

La variación del impulso lineal de cada una se debe a la presencia de la otra, y puede depender de la distancia relativa entre las partículas, su velocidad relativa y parámetros propios de las mismas tales como la masa m_i , carga eléctrica q_i , etcétera. Al vector que representa esa acción lo llamaremos fuerza ejercida por una partícula sobre la otra:

$$\frac{d}{dt} \vec{P}_1(t) = \vec{f}_{21}$$

y de (1.4) obtenemos la expresión de la tercera ley de Newton:

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Definiremos el torque de una fuerza respecto de un punto cualquiera como el producto vectorial:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

y de la misma forma el impulso angular es el producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{P} \\ &= m\vec{r} \times \vec{v} \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde \vec{r} es la distancia de dicho punto a la partícula. Comparando (1.5) con la expresión (1.2) para la velocidad angular vemos que el impulso angular está ligado al movimiento de rotación de la partícula. Multiplicando vectorialmente la ecuación de Newton 1.3 por \vec{r} :

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{P})}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P}$$

El último término es nulo, por lo que resulta:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

De aquí obtenemos un nuevo teorema de conservación:

EL IMPULSO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA ES CONSTANTE EN UNA DIRECCIÓN EN QUE EL TORQUE APLICADO ES NULO.

El tercer teorema de conservación requiere de la definición de trabajo realizado sobre la partícula por las fuerzas actuantes sobre ella: cuando la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria entre dos puntos 1 y 2 como mostramos en la figura 1.9, el trabajo realizado por las fuerzas se define por:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$$

Ésta es una integral curvilínea a lo largo de la trayectoria seguida por la partícula. Usando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

entonces:

$$W_{12} = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_1^2 = T_2 - T_1 \quad (1.6)$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ se denomina energía cinética de la partícula.

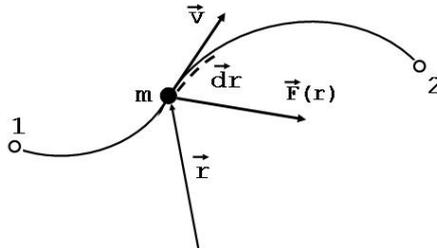


Figura 1.9: Trabajo realizado por la fuerza aplicada

EL TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS ACTUANTES SE TRADUCE EN LA VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA.

Cuando la fuerza actuante es tal que el trabajo realizado entre los puntos 1 y 2 es independiente del camino seguido se dice que esa fuerza es conservativa, en cuyo caso el trabajo realizado en un circuito cerrado es nulo:

$$W_C = \oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Si es posible definir una superficie cerrada S para la que la frontera sea la curva C , entonces se puede aplicar el teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{s} \quad (1.7)$$

Definiendo un circuito cerrado C infinitesimal rodeando un punto del espacio, como (1.7) vale independientemente del punto y la forma de la curva, debe ser:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Por último, un campo vectorial cuyo rotor es nulo puede siempre representarse como el gradiente de una función escalar, entonces las fuerzas que llamaremos conservativas se expresan por:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} V(\vec{r}) \quad (1.8)$$

donde explicitamos el signo menos por conveniencia para la posterior definición del papel que jugará la función V , llamada energía potencial.

La expresión (1.8) indica que

MECÁNICA CLÁSICA

LA FUERZA CONSERVATIVA ACTUANTE EN UNA DIRECCIÓN CUALQUIERA ES LA DERIVADA DE LA ENERGÍA POTENCIAL EN ESA DIRECCIÓN (ESTO ES: EL GRADIENTE) CON SIGNO CAMBIADO.

Volviendo a la expresión (1.6) para el trabajo realizado por la fuerza conservativa, obtenemos que $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, es decir:

$$T(\vec{r}) + V(\vec{r}) = \text{constante} = E \quad (1.9)$$

La suma de energía cinética más energía potencial se llamará energía total, y el tercer teorema de conservación (1.9) dice entonces que

SI LAS FUERZAS ACTUANTES SON CONSERVATIVAS, LA ENERGÍA TOTAL ES CONSTANTE EN EL CURSO DE LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA PARTÍCULA.

Es conveniente notar que sólo están definidas variaciones de la energía potencial y no el valor absoluto, y lo mismo para la energía cinética que cambia con el sistema inercial usado.

1.8. Ejemplos

1.8.1. proyectil moviéndose en el vacío

Vamos a estudiar el movimiento de proyectiles que se mueven a alturas muy pequeñas frente al radio terrestre, de forma que podamos suponer que experimentan una aceleración constante $-g$ en la dirección de la vertical local. La atmósfera ejerce una resistencia al movimiento del proyectil manifestada en una fuerza opuesta a la dirección del movimiento y que es una función de la velocidad del cuerpo. En primer lugar dejamos de lado esta fuerza por lo que consideramos un proyectil de masa m moviéndose en el vacío que es disparado desde la superficie con una velocidad \vec{v}_0 y dirección θ_0 conocidas tal como lo mostramos en la figura 1.10.

Las ecuaciones del movimiento en las dos coordenadas x, y son

$$m \ddot{x} = 0 \quad (1.10)$$

$$m \ddot{y} = -mg \quad (1.11)$$

con condiciones iniciales:

$$x(t = 0) = 0 \quad (1.12)$$

$$y(t = 0) = 0 \quad (1.13)$$

$$\dot{x}(t = 0) = v_0 \cos \theta_0 \quad (1.14)$$

$$\dot{y}(t = 0) = v_0 \sin \theta_0 \quad (1.15)$$

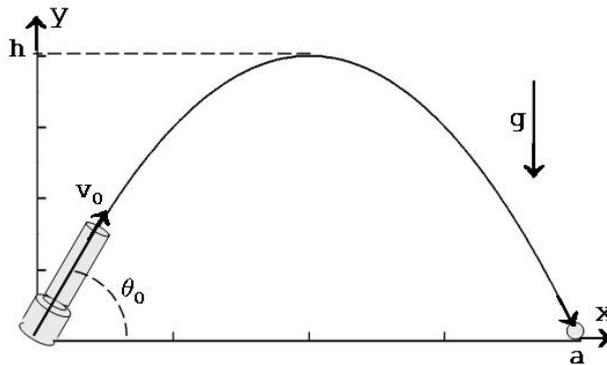


Figura 1.10: Trayectoria de un proyectil disparado en el vacío

donde usamos la notación $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, etc. Las soluciones de las ecuaciones 1.10, 1.11 que satisfacen las condiciones iniciales son:

$$x(t) = v_0 t \cos \theta_0 \quad (1.16)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta_0 \quad (1.17)$$

Podemos obtener la trayectoria del proyectil $y = f(x)$ eliminando t entre (1.16) y (1.17):

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} + x \tan \theta_0$$

Ésta es la ecuación de una parábola que pasa por el origen de coordenadas, tal como vemos en la figura 1.10. El alcance a del disparo es el valor de $x (\neq 0)$ para el que $y = 0$:

$$a = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

en tanto la altura h se alcanza al tiempo en que se anula \dot{y} :

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta_0$$

$$t_h = \frac{v_0}{g} \sin \theta_0$$

entonces:

$$h = y(t_h) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta_0$$

El alcance máximo se obtiene para una inclinación $\theta_0 = 45^\circ$:

$$a_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}$$

en tanto la altura máxima se logra para $\theta_0 = 90^\circ$:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

1.8.2. proyectil moviéndose en la atmósfera. (Opcional)

Al moverse en la atmósfera el proyectil colisiona con las moléculas del aire transfiriéndoles impulso y energía. La consiguiente reducción en la velocidad del proyectil se describe por medio de una fuerza de frenamiento dirigida en la dirección de la misma y actuando en el sentido opuesto, que no depende de la posición cuando el proyectil se mueve en un medio homogéneo. La tasa de transferencia de impulso depende de la velocidad del proyectil respecto de las moléculas del aire, por lo tanto la fuerza de frenamiento es una función $\vec{F}_{ret} = \vec{f}(\vec{v})$.

Observaciones experimentales y descripciones de la interacción entre el fluido y el proyectil justifican el uso de una ley de potencias para la fuerza de retardo:

$$\vec{F}_{ret} = -kv^n \frac{\vec{v}}{v}$$

Para velocidades pequeñas menores a $25m/s$ es aceptable una función lineal $n = 1$; para velocidades mayores hasta la del sonido en el gas ($330m/s$ para aire a presión y temperatura normales) es más adecuada una función cuadrática $n = 2$; de allí en más la dependencia de la fuerza de frenamiento en la velocidad se acerca nuevamente a la linealidad[10].

Consideremos el caso de dependencia lineal de la fuerza de frenamiento con la velocidad del cuerpo. Las ecuaciones (1.10,1.11) se reemplazan por:

$$\ddot{x} = -k' \dot{x} \tag{1.18}$$

$$\ddot{y} = -g' - k' \dot{y} \tag{1.19}$$

donde $k' = k/m$, $g' = g/m$; operando sobre (1.18):

$$\frac{d \dot{x}}{\dot{x}} = -k' dt$$

$$\ln \dot{x} = -k't + C$$

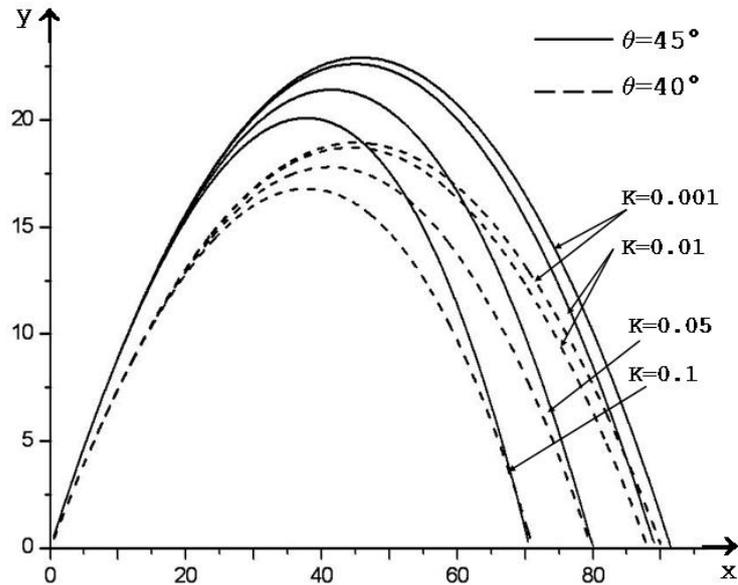


Figura 1.11: Trayectorias de un proyectil sometido a una fuerza de frenamiento lineal con la velocidad, en función del coeficiente de frenamiento y para dos valores del ángulo de disparo

$$\dot{x}(t) = e^C e^{-k't}$$

Fijamos el factor constante para que se satisfaga la condición inicial (1.14):

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos \theta_0 e^{-k't}$$

Integrando nuevamente obtenemos:

$$x(t) = \frac{v_0}{k'} \cos \theta_0 (1 - e^{-k't}) \quad (1.20)$$

La ecuación (1.19) puede integrarse una vez:

$$\frac{dy}{dt} + k'y = -g't + C_1$$

La constante C_1 resultante de la cuadratura se fija a través de las condiciones iniciales (1.13,1.15):

$$\frac{dy}{dt} + k'y = v_0 \sin \theta_0 - g't \quad (1.21)$$

Ésta es una ecuación diferencial inhomogénea de primer orden; su solución general es la suma de la solución de la ecuación homogénea $\frac{dy}{dt} + k'y = 0$:

$$y_h(t) = C e^{-k't} \quad (1.22)$$

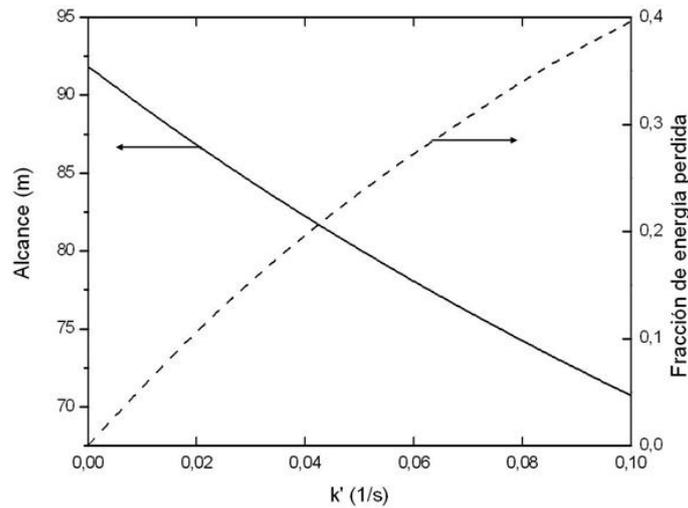


Figura 1.12: Alcance y energía perdida por fricción en el aire como función del coeficiente de rozamiento

más una solución particular que se propone de la forma

$$y_p(t) = f(t)e^{-k't}$$

Reemplazando en (1.21):

$$\frac{df}{dt} = e^{k't} (v_0 \sin \theta_0 - g't)$$

resulta:

$$f(t) = e^{k't} \left[\frac{v_0}{k'} \sin \theta_0 + \frac{g'}{k'^2} (1 - k't) \right]$$

Finalmente, la solución general es:

$$y(t) = C e^{-k't} + \frac{v_0}{k'} \sin \theta_0 + \frac{g'}{k'^2} (1 - k't)$$

y la de nuestro problema con condición inicial $y(t = 0) = 0$:

$$y(t) = \frac{1}{k'} \left(v_0 \sin \theta_0 + \frac{g'}{k'} \right) (1 - e^{-k't}) - \frac{g'}{k'} t \quad (1.23)$$

El frenamiento del aire disminuirá tanto el alcance como la altura del proyectil. Ahora la ecuación de la órbita no es tan sencilla como en el caso de tiro en el vacío:

$$y(x) = \left(v_0 \sin \theta_0 + \frac{g'}{k'} \right) \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} + \frac{g'}{k'^2} \ln \left(1 - \frac{k'x}{v_0 \cos \theta_0} \right)$$

y el alcance dado por $y(x = a) = 0$ conviene obtenerlo en forma numérica. En la figura 1.11 presentamos las trayectorias para una velocidad inicial v_0 y diferentes valores del coeficiente de frenamiento k' y del ángulo de disparo θ_0 .

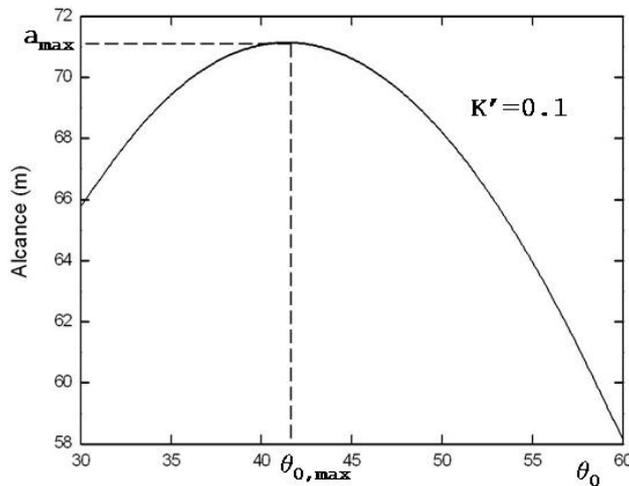


Figura 1.13: Alcance en función del ángulo de inclinación para un coeficiente $k' = 0,1s^{-1}$ de frenamiento lineal en v . El alcance máximo se presenta para $\theta_0 = 41^{\circ}22'$

Naturalmente, el alcance disminuye a medida que aumenta el coeficiente de frenamiento k' de la misma forma que aumenta la energía cedida por el proyectil al aire. La figura 1.12 muestra los resultados obtenidos.

Por último, la figura 1.11 muestra que para valores apreciables del coeficiente de frenamiento k' es de esperar que el alcance máximo se produzca para ángulos de disparo θ_0 menores que 45° , la figura 1.13 muestra el alcance como función de θ_0 para $k' = 0,1s^{-1}$.

La razón reside en que en ausencia de frenamiento el alcance máximo ocurre a 45° . Al moverse en la atmósfera la energía cedida por el proyectil al aire crece con el camino recorrido, el que a su vez aumenta con el ángulo de disparo. Por lo tanto el máximo se corre a ángulos menores a 45° .

1.8.3. Problema del cohete

Consideremos un cohete que posee una masa m , compuesta de la masa propia m_0 más la masa de combustible m_g . El quemado del combustible produce una expulsión de gas con velocidad

constante v respecto del cohete, y supondremos que la masa expulsada por unidad de tiempo es constante. Estudiaremos el problema suponiendo que no existen fuerzas externas actuando sobre el cohete por lo que el impulso lineal total del cohete más gases expulsados es constante (ver figura 1.14):

$$P = P_c(t) + P_g(t) = \text{constante}$$

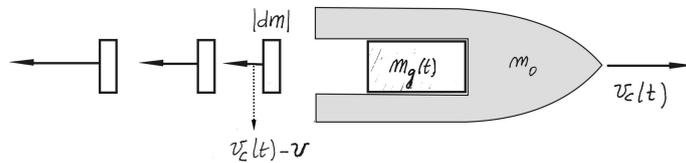


Figura 1.14: Cohete en movimiento al tiempo t y diferenciales de masa de gas expulsados a tiempos anteriores

La variación en el impulso lineal del cohete presenta un término debido a la disminución de masa y otro producido por un probable cambio en su velocidad:

$$\begin{aligned} \frac{dP_c}{dt} &= \frac{dm_c}{dt} v_c(t) + m_c \frac{dv_c}{dt}(t) \\ \frac{dm_c}{dt} &< 0 \end{aligned}$$

en tanto que el impulso lineal del gas expulsado varía en el intervalo $t, t + dt$ por el agregado de masa $-\frac{dm_c}{dt} dt$ con velocidad $v_c(t) - v$

$$\frac{dP_g}{dt} = -\frac{dm_c}{dt} (v_c(t) - v)$$

La conservación del impulso lineal total:

$$\frac{dP_c}{dt} + \frac{dP_g}{dt} = 0$$

determina que:

$$m_c \frac{dv_c}{dt} + \frac{dm_c}{dt} v = 0 \tag{1.24}$$

que se integra fácilmente:

$$v_c(t) - v_c(0) = -v \ln \frac{m_g(t) + m_0}{m_g(0) + m_0}$$

donde m_0 es la masa propia del cohete, sin combustible. La velocidad final alcanzada cuando se quema todo el combustible resulta ser:

$$v_c(\infty) = v_c(0) + v \ln \frac{m_g(0) + m_0}{m_0}$$

Analicemos ahora el problema desde otro punto de vista: ¿Por qué se acelera el cohete?: no hay fuerzas externas por lo que son las fuerzas internas los agentes productores del movimiento. La magnitud de estas fuerzas internas puede obtenerse mediante la siguiente consideración: en el instante t podemos considerar al cohete constituido por dos cuerpos moviéndose con la misma velocidad como se muestra en la figura 1.15, uno de masa $m_0 + m_g(t + dt)$ y otro es la masa $|dm|$ de combustible que será expulsada a $t + dt$: el cambio en el impulso del diferencial de masa de combustible es $-|dm|v$, por lo que la fuerza de reacción sobre el resto del cohete es:

$$F = \frac{|dm|}{dt}v$$

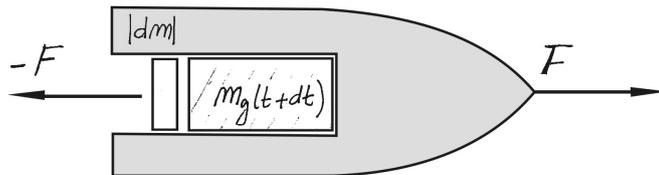


Figura 1.15: Fuerzas de acción y reacción entre el cohete y el diferencial de masa de gas expulsado el tiempo t

La segunda ley de Newton para el cohete de masa $m(t) = m_0 + m_g(t)$ es:

$$F = m(t) \frac{dv_c(t)}{dt}$$

y resulta:

$$\frac{|dm|}{dt}v = m(t) \frac{dv_c(t)}{dt}$$

que es equivalente a (1.24).

La primera descripción considera al cohete como un cuerpo de masa variable, la segunda supone que en cada instante son dos cuerpos que se separan por acción de las fuerzas internas.

1.9. Sistemas de partículas

1.9.1. Coordenadas del centro de masas

Consideramos un sistema de N partículas como el de figura 1.16, estando cada una de ellas sujeta a fuerzas externas y a las fuerzas que el resto de las partículas ejercen sobre la misma. Ésta es la representación general de uno o varios cuerpos macroscópicos, que consideramos constituidos

por la unión más o menos rígida de partículas o puntos materiales. Definimos la masa total y el punto centro de masas por las relaciones:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i / M$$

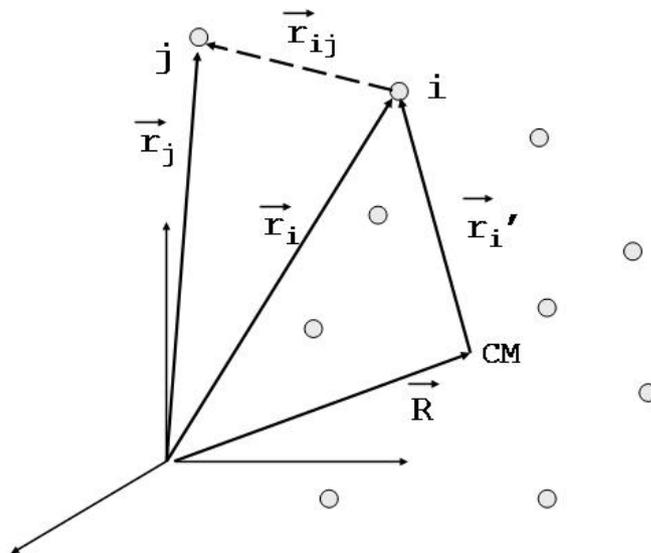


Figura 1.16: Sistema de partículas, donde se muestra el vector centro de masas R y un vector relativo entre partículas r_{ij}

Definimos los impulsos lineal, angular y energías cinética y potencial totales del sistema como la suma de dichas magnitudes sobre las N partículas. Podemos hallar esas expresiones en términos de la coordenada del centro de masas y las coordenadas relativas de las partículas respecto de dicho punto. Siendo:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

encontramos que:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = 0 \tag{1.25}$$

entonces el impulso lineal total es:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_i}{dt} \right] \\ &= M\vec{V} + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = M\vec{V}\end{aligned}\quad (1.26)$$

EL IMPULSO LINEAL TOTAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS ES EQUIVALENTE AL DE UNA PARTÍCULA DE MASA M MOVIÉNDOSE CON EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA.

El impulso angular total también se simplifica usando (1.25):

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i [\vec{R} + \vec{r}'_i] \times \left[\frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_i}{dt} \right] \\ &= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times \frac{d\vec{r}'_i}{dt}\end{aligned}$$

EL IMPULSO ANGULAR TOTAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS ES EQUIVALENTE AL DE UNA PARTÍCULA DE MASA M MOVIÉNDOSE CON EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA, MÁS EL IMPULSO ANGULAR DE LAS PARTÍCULAS RELATIVO AL CENTRO DE MASAS.

La energía cinética total del sistema de partículas es:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (V^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{v}'_i + v_i'^2)\end{aligned}$$

donde: $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$, $\vec{v}'_i = \frac{d\vec{r}'_i}{dt}$. El término cruzado es:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \vec{V} \cdot \vec{v}'_i &= \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}'_i}{dt} \\ &= \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = 0\end{aligned}$$

MECÁNICA CLÁSICA

Luego:

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (1.27)$$

LA ENERGÍA CINÉTICA TOTAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS ES EQUIVALENTE AL DE UNA MASA M MOVIÉNDOSE CON EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA, MÁS LA ENERGÍA CINÉTICA DE LAS PARTÍCULAS RELATIVA AL CENTRO DE MASAS.

Analizaremos ahora el trabajo realizado por las fuerzas actuantes sobre las partículas cuando el sistema evoluciona de una configuración a otra, representadas por las posiciones de las N partículas :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\equiv \{\vec{r}_i(1)\} \\ \mathbf{2} &\equiv \{\vec{r}_i(2)\} \end{aligned}$$

La fuerza total actuante sobre una partícula es:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^e + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ji}$$

donde \vec{F}_i^e es la fuerza externa aplicada a la partícula i , y \vec{f}_{ji} la fuerza que la partícula j ejerce sobre la i .

Vamos a considerar el caso en que todas las fuerzas actuantes son conservativas, es decir derivables del gradiente de una función escalar de las posiciones:

$$\vec{F}_i^e = -\vec{\nabla}_{r_i} V_i(\vec{r}_i)$$

$$\vec{f}_{ji} = -\vec{\nabla}_{r_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

Además, por la tercera ley de Newton:

$$\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$$

Calculamos el trabajo realizado por el par de fuerzas internas \vec{f}_{ij} y \vec{f}_{ji} cuando desplazamos las partículas i, j desde sus posiciones iniciales $\vec{r}_i(1), \vec{r}_j(1)$ a las finales $\vec{r}_i(2), \vec{r}_j(2)$. El trabajo total realizado por dichas fuerzas al pasar el sistema de partículas de la configuración $\mathbf{1}$ a la $\mathbf{2}$ es:

$$\begin{aligned} W_{ij}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) &= \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \vec{f}_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) d\vec{r}_i + \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) d\vec{r}_j \\ &= \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) (d\vec{r}_j - d\vec{r}_i) \\ &= \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) d\vec{r}_{ij} \end{aligned}$$

La fuerza interna $\vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ puede generarse como el gradiente de una función energía potencial $V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$. Por ser una fuerza entre partículas i y j no puede depender en forma independiente de las posiciones \vec{r}_i, \vec{r}_j de las partículas respecto del origen de coordenadas elegido, sólo puede depender del vector relativo $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ representado en la figura 1.16. Más aún, su magnitud no puede depender de las componentes $x_{ij} = x_j - x_i$ pues éstas están referidas a las orientaciones elegidas para los ejes coordenados que son elementos externos al par de partículas i, j . La energía potencial V_{ij} podrá depender entonces de r_{ij} y en general de magnitudes escalares como la carga eléctrica y la masa (independientes del marco de referencia externo).

$$V_{ij} = V_{ij}(r_{ij})$$

y la fuerza resulta:

$$\begin{aligned}\vec{f}_{ij} &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(r_{ij}) = -\frac{dV_{ij}(r_{ij})}{dr_{ij}} \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} r_{ij} \\ &= -\frac{dV_{ij}(r_{ij})}{dr_{ij}} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\end{aligned}$$

Retornemos al trabajo realizado por el par de fuerzas internas $\vec{f}_{ij}, \vec{f}_{ji}$ cuando son conservativas:

$$W_{ij}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = -\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \frac{dV_{ij}(r_{ij})}{dr_{ij}} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} d\vec{r}_{ij} \quad (1.28)$$

y siendo: $\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} d\vec{r}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} \frac{1}{2} d(r_{ij}^2) = dr_{ij}$

$$\begin{aligned}W_{ij}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) &= -\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \frac{dV_{ij}(r_{ij})}{dr_{ij}} dr_{ij} \\ &= V_{ij}(r_{ij}(\mathbf{1})) - V_{ij}(r_{ij}(\mathbf{2}))\end{aligned}$$

El trabajo de todas las fuerzas actuantes sobre las N partículas es la suma de los realizados por las fuerzas externas más los realizados por los pares de fuerzas internas recién calculados:

$$W^{TOTAL}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \sum_{i=1}^N W_i^{EXT}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) + \sum_{i,j=1(i>j)}^N W_{ij}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

Para fuerzas externas e internas conservativas resulta:

$$\begin{aligned}W^{TOTAL}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) &= \sum_{i=1}^N [V_i(\mathbf{1}) - V_i(\mathbf{2})] \\ &\quad + \sum_{i,j=1(i>j)}^N [V_{ij}(\mathbf{1}) - V_{ij}(\mathbf{2})]\end{aligned}$$

Definiendo la energía potencial total como la suma de las energías potenciales generadoras de las fuerzas externas sobre cada partícula, más las energías potenciales entre pares de partículas:

$$V = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}_i) + \sum_{i,j(i<j)} V_{ij}(r_{ij}) \quad (1.29)$$

Concluimos que

PARA FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS CONSERVATIVAS, EL TRABAJO REALIZADO POR LAS MISMAS SE PUEDE EXPRESAR COMO MENOS EL INCREMENTO DE LA FUNCIÓN ENERGÍA POTENCIAL TOTAL.

Resulta entonces:

$$W_{12}^{TOTAL} = V(\mathbf{1}) - V(\mathbf{2}) \quad (1.30)$$

Finalmente, definimos la energía total como la suma de (1.27) y (1.29):

$$E = T + V \quad (1.31)$$

1.9.2. Ecuaciones del movimiento y teoremas de conservación para un sistema de partículas

Las ecuaciones del movimiento de un sistema de partículas son las que provienen de la aplicación de la segunda ley de Newton a cada una de ellas:

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ji} \quad (1.32)$$

De esas N ecuaciones podemos extraer una que dé cuenta de la evolución del impulso lineal total: sumándolas

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \quad (1.33)$$

Las fuerzas internas no aparecen porque se anulan de a pares. Reemplazando en (1.33) el resultado (1.26) obtenemos la ecuación de evolución:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} \quad (1.34)$$

EL CENTRO DE MASAS SE MUEVE COMO SI LAS FUERZAS EXTERNAS ESTUVIERAN APLICADAS SOBRE UNA PARTÍCULA DE MASA M EN DICHO PUNTO.

Definimos:

CONSTANTE DEL MOVIMIENTO O INTEGRAL DEL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS ES TODA FUNCIÓN DE LAS COORDENADAS Y VELOCIDADES QUE SE MANTIENE CONSTANTE DURANTE LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL SISTEMA.

Las integrales del movimiento más fáciles de identificar y que son más útiles para describir dicha evolución son la energía, el impulso lineal e impulso angular. Aplicando esta definición a (1.34) vemos que:

EL IMPULSO LINEAL TOTAL SERÁ UNA INTEGRAL DEL MOVIMIENTO EN UNA DIRECCIÓN EN QUE LA PROYECCIÓN DE LA RESULTANTE DE LAS FUERZAS EXTERNAS SE ANULE.

Para obtener la ecuación de evolución del impulso angular total multiplicamos vectorialmente las ecuaciones del movimiento (1.32) por el vector posición \vec{r}_i y sumamos sobre las N partículas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \frac{d\vec{P}_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i,j(i \neq j)}^N \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} \end{aligned}$$

Hacemos explícita en la doble suma aquella sobre pares de fuerzas $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j(i \neq j)}^N \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} &= \sum_{i,j(i < j)}^N \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} + \sum_{i,j(i > j)}^N \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} \\ &= \sum_{i,j(i < j)}^N [\vec{r}_i - \vec{r}_j] \times \vec{f}_{ji} \end{aligned}$$

que se anula cuando las fuerzas de acción y reacción sean colineales (condición fuerte de la tercera ley de Newton). En este caso obtenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

que es la ecuación de evolución del impulso angular total. Concluimos entonces que

PARA FUERZAS DE ACCIÓN Y REACCIÓN COLINEALES, EL IMPULSO ANGULAR TOTAL SE CONSERVA EN UNA DIRECCIÓN EN QUE LA PROYECCIÓN DEL TORQUE DE LAS FUERZAS EXTERNAS SEA NULO.

El teorema de conservación para la energía total (1.31) del sistema de partículas se obtiene a partir de la ecuación del movimiento para cada partícula:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ji}$$

El trabajo de las fuerzas aplicadas es:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{i=1}^N \int_1^2 [\vec{F}_i^{ext}(\vec{r}_i) + \sum_{j=1(j \neq i)}^N \vec{f}_{ji}] d\vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\vec{r}_i(1)}^{\vec{r}_i(2)} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\vec{v}_i(1)}^{\vec{v}_i(2)} m_i \frac{1}{2} dv_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [v_i(2)^2 - v_i(1)^2] \\ &= T_2 - T_1 \end{aligned}$$

Este resultado, unido a la expresión 1.30 válida para fuerzas conservativas provee el teorema de conservación de la energía total:

SI LAS FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS SON CONSERVATIVAS LA ENERGÍA TOTAL $E = T + V$ DEL SISTEMA ES UNA CONSTANTE DEL MOVIMIENTO.

1.10. Ejemplos

1.10.1. El problema del hombre y el bote

Un problema de dinámica elemental con un resultado aparentemente inesperado es el siguiente[6]: Un hombre se encuentra en un extremo de un bote, y en el instante $t = 0$ comienza a moverse hacia el otro extremo donde se detiene. Debemos encontrar el desplazamiento total del bote considerando dos situaciones:

- que no hay fuerzas de rozamiento con el agua, y
 - que existe roce y dicha fuerza es proporcional a la velocidad del bote.
- Este es un problema de dos cuerpos sujetos a moverse en una dimensión.

Caso a):

No hay fuerzas externas, por lo que el centro de masas del sistema debe permanecer en reposo. Tal como se muestra en la figura 1.17, tomamos un bote de longitud 2ℓ con su centro de masas en el punto medio, y fijamos el origen del sistema inercial de coordenadas coincidente con ese punto en el instante inicial.